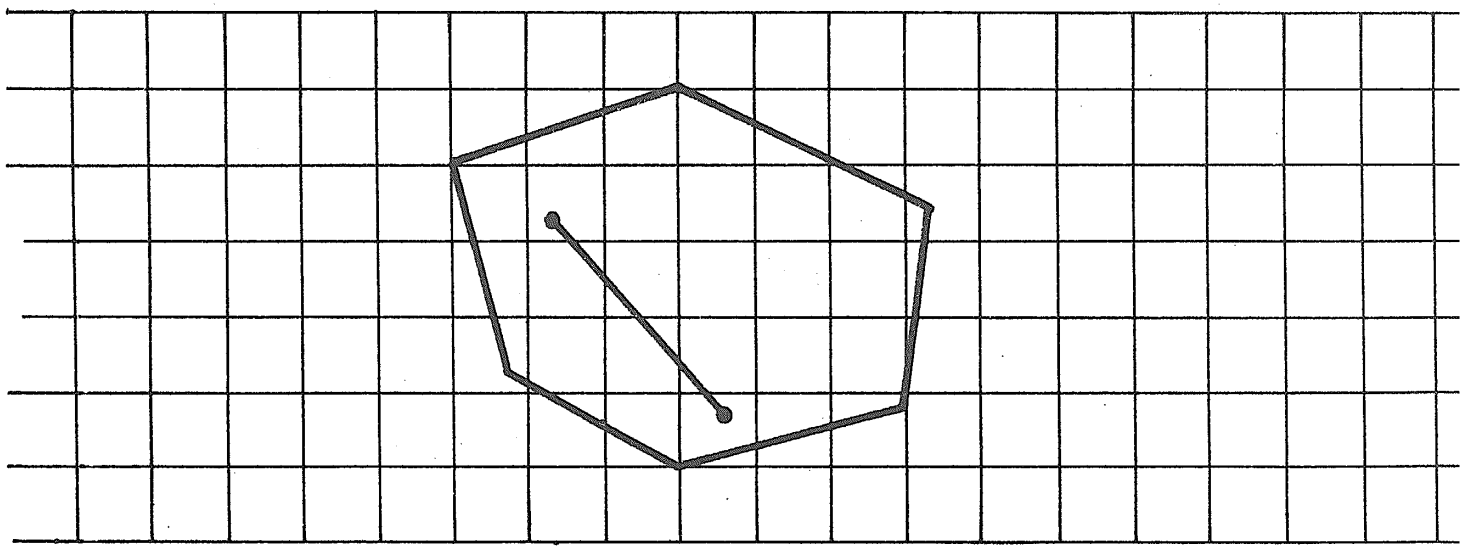
POLÍGONOS CONVEXOS

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. ***Polígonos convexos***
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4
Geometría euclidiana

Módulo 5

POLÍGONOS CONVEXOS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
POLÍGONOS CONVEXOS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1244-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1 Ángulos interiores y ángulos exteriores de un triángulo

5.2 Congruencia de triángulos

5.3 Cuadriláteros convexos. Elementos

5.4 Cuadriláteros convexos. Clasificación

5.5 Polígonos regulares convexos

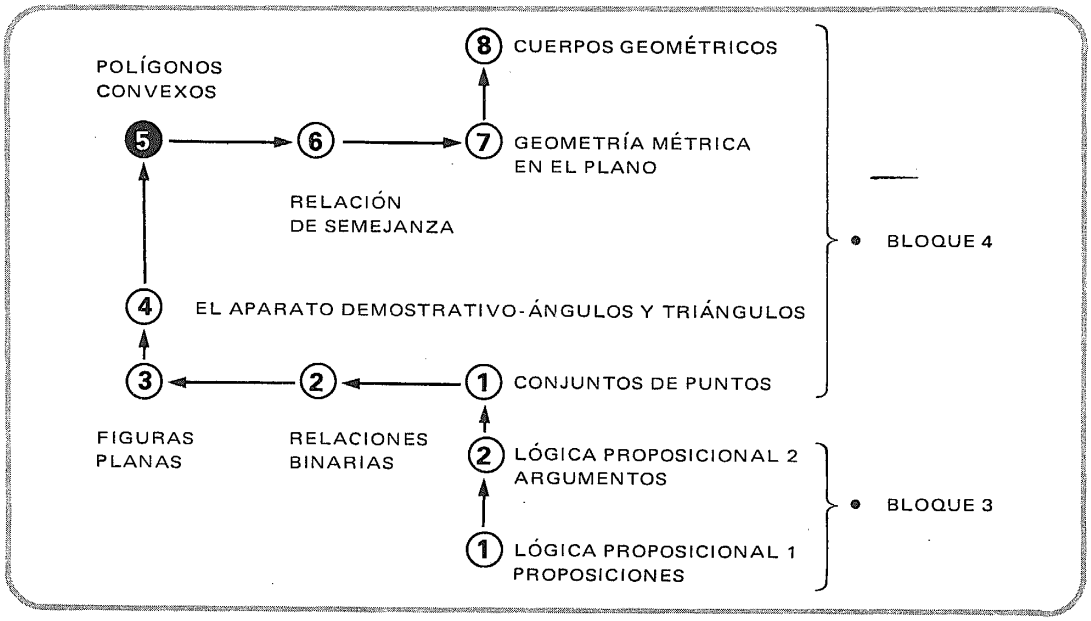
5.6 Circunferencia

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 5. Polígonos convexos

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con los triángulos, los polígonos en general y la circunferencia, y aplicarlos a la resolución de problemas prácticos

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2
• Conceptos geométricos básicos	4	1

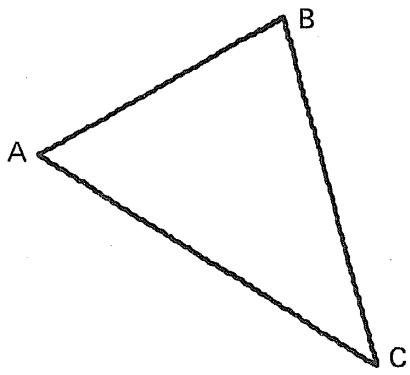
5.1

Ángulos interiores y ángulos exteriores
de un triángulo.

1

A una figura plana
como la aquí representada
le hemos llamado
└_____┘,

y la simbolizamos
así: └_____┘,



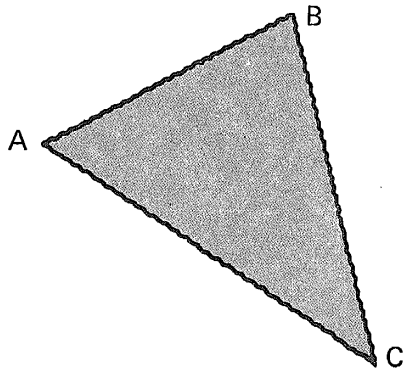
triángulo

△ABC

2

A una figura plana, como ésta,
le hemos dado
el nombre de
└_____┘,

y la simbolizamos
así: └_____┘,

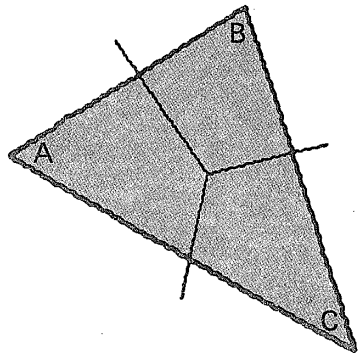


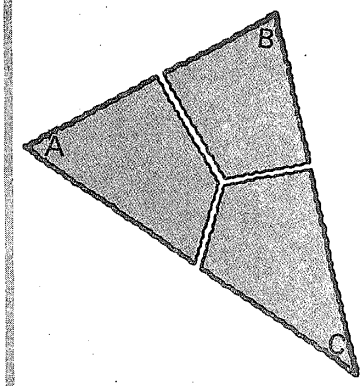
región triangular

▲ABC

3

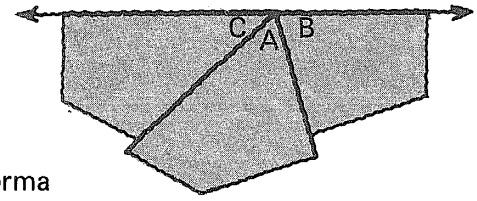
Ahora bien,
recortemos en cartulina
o papel
una figura
con la forma de
una región triangular,
y
separémosla en tres partes,
señalando los vértices
para su
posterior identificación.





4

Dispongamos las tres partes
en la forma indicada.



Observamos que,
cualquiera que sea la forma
de la región triangular
escogida,
obtenemos una recta como
resultado de la yuxtaposición de
las tres "regiones angulares".

5

Este hecho experimental
parece llevarnos a concluir
algo como esto:

Por ejemplo:

La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a la medida de un ángulo llano.

6

Y si la unidad de medida
angular empleada es el grado,
decimos que:

La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

7

Pero
no nos conformamos
con esta evidencia experimental
y
emprendemos la tarea
de

demostrar

tal proposición.

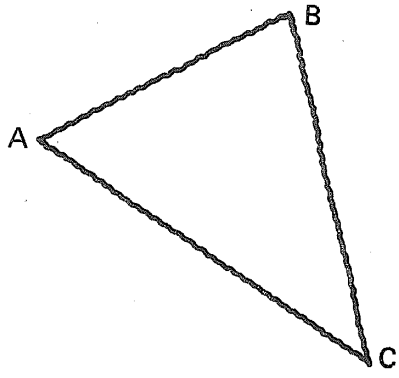
8

Conjetura:

La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Escribamos esto en la forma

si p entonces q:



Por ejemplo:

Si $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores de un triángulo, entonces $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

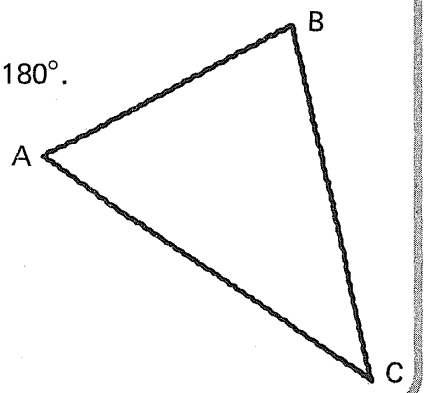
9

Se requiere, entonces,
demostrar que:

$\angle A, \angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores de un triángulo $\Rightarrow \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

Sea (n)...

Hipótesis



$\angle A, \angle B$ y $\angle C$ los ángulos interiores del $\triangle ABC$

10

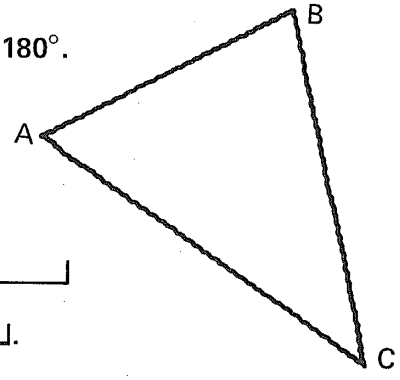
Se requiere demostrar que:

$\angle A, \angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores del $\triangle ABC \Rightarrow \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

Sean:
$\angle A, \angle B$ y $\angle C$
los ángulos interiores
del $\triangle ABC$

Demostrar que: [_____]

Esta es la [_____] ó [____].



- $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.
- conclusión
- tesis

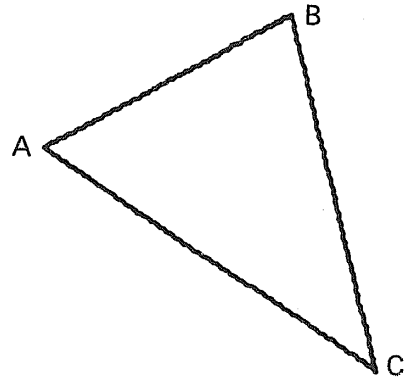
11

Sean:

$\angle A, \angle B$ y $\angle C$
los ángulos interiores
del $\triangle ABC$.

Demostrar que:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

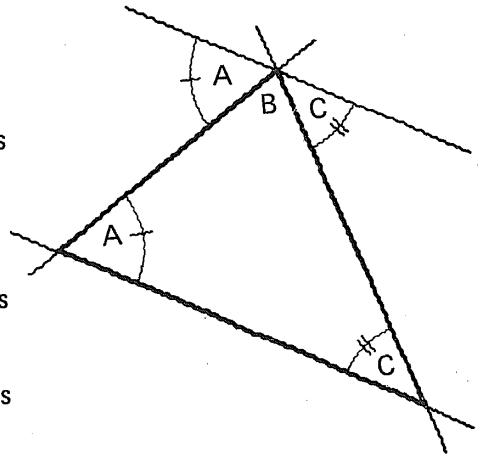


Tracemos un plan para la demostración.

12

Atención.

Observamos que
si, por ejemplo, trazamos
por el vértice B
una paralela a $\overleftrightarrow{AC}$
se obtiene una
figura formada por
dos paralelas intersecadas
por dos transversales,
en la que podemos
"visualizar" las relaciones
indicadas.



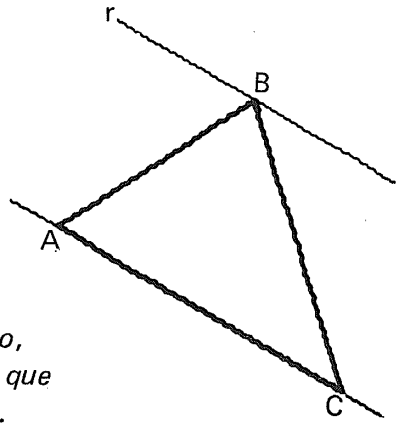
13

Introduzcámos, entonces,
la hipótesis adicional.

Sea: $r \parallel \overleftrightarrow{AC}$

lo cual está permitido
por el axioma A4, que
podemos escribir en la forma:

Si $\overleftrightarrow{AC}$ *es una recta y B un punto,*
entonces *existe una recta única que*
contiene a B y es paralela a $\overleftrightarrow{AC}$.



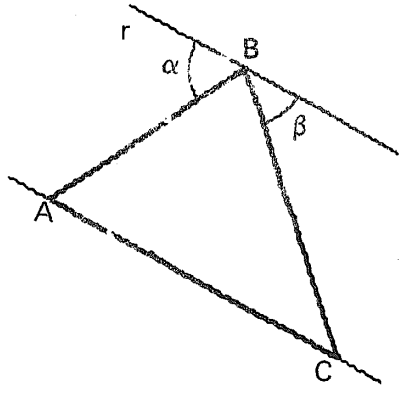
14

Completar la demostración en el cuadro siguiente.

Sean $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los ángulos
interiores del $\triangle ABC$.

Demostrar que

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.



15

Demostración

Proposiciones:	Razones:
1. $r \parallel \overleftrightarrow{AC}$	1. Hipótesis adicional.

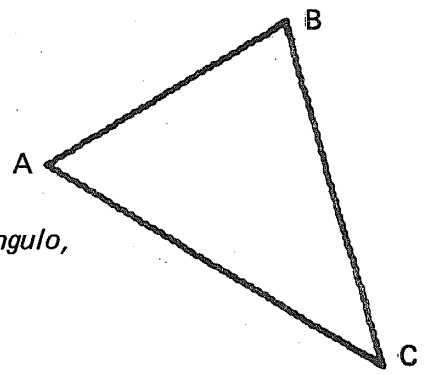
Una posible secuela

2. $\measuredangle\alpha + \measuredangle B + \angle\beta = 180^\circ$	2. Son adyacentes.
3. $\measuredangle\alpha = \measuredangle A$	3. Son alternos internos (T7).
4. $\measuredangle\beta = \measuredangle C$	4. Son alternos internos (T7).
$\vdash$	
5. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$	5. Sustitutividad (P6) 3 y 4 en 2.

16

Teorema 9.

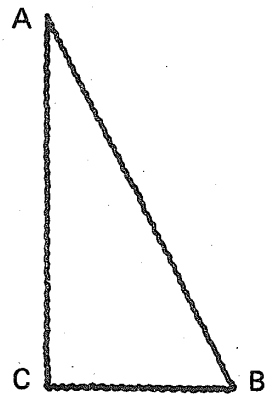
Si $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ *son los ángulos interiores de un triángulo,* entonces $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$.



17

Si $\measuredangle A = 30^\circ$ y $\measuredangle C = 90^\circ$, entonces

$\measuredangle B =$ ⌊___⌋.

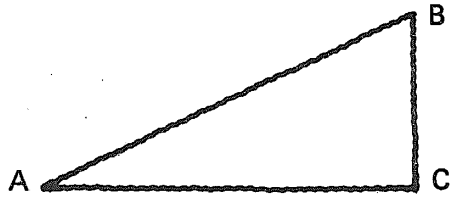


60°

18

Si $\measuredangle A = 25° 30'$
y $\measuredangle C = 90°$,
entonces

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋.



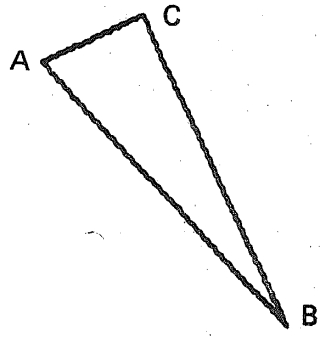
64° 30′

19

$\measuredangle B = 17° 55' 32''$

$\measuredangle C = 90°$

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋



72° 04′ 28″

20

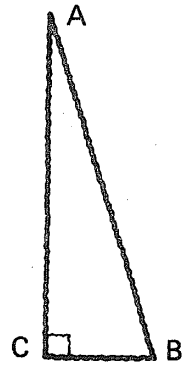
$\measuredangle A = 72° 04' 28''$

$\measuredangle B = 17° 55' 32''$

$\measuredangle C = 90° 00' 00''$

Por medir 90°
el ángulo C es ⌊_____⌋

Por tener un ángulo interior ⌊_____⌋
el triángulo ABC es ⌊_____⌋



recto

recto
rectángulo

21

$\measuredangle A = 72^\circ\ 04'\ 28''$

$\measuredangle B = 17^\circ\ 55'\ 32''$

$\measuredangle C = 90^\circ\ 00'\ 00''$

El ángulo A,
por medir más de 0° y menos de 90°
es ⌊_____⌋.

El ángulo B,
por medir ⌊_____⌋
es ⌊_____⌋.

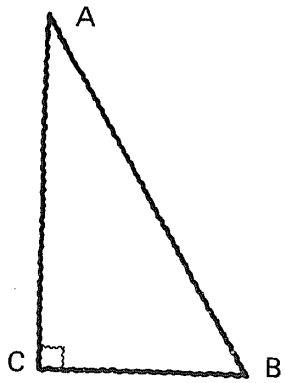
agudo

más de 0° y menos de 90°
agudo

22

Podemos afirmar que
todo triángulo rectángulo
tiene ⌊_____⌋ ángulo(s) interior(es)
agudo(s)
porque

⌊_____⌋



dos

La medida de uno de sus ángulos interiores es igual a 90°;
la suma de las medidas de los otros dos es igual a 90°;
la medida de cada uno de éstos debe ser menor de 90°, ya que se descarta la posibilidad de que cualquiera de los dos sea nulo (en cuyo caso no existe un triángulo).

23

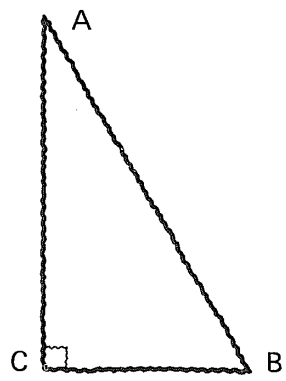
Hemos dicho que:

Si $\measuredangle C = 90^\circ$,

entonces

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90^\circ$.

Por esta razón
$\angle A$ y $\angle B$ son ⌊_____⌋



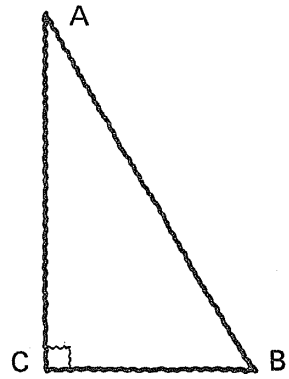
Por ejemplo:

complementarios

24

Un triángulo rectángulo
tiene
dos ángulos interiores agudos
que son
└──────────┘.

porque
la suma de sus medidas
es igual
a la medida de un ángulo recto.



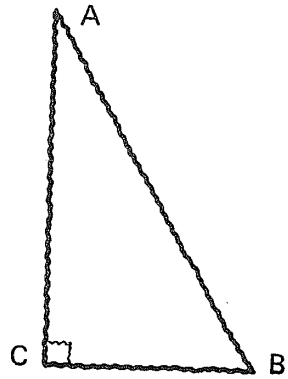
complementarios

25

Como en el △rectángulo ABC
$\measuredangle C = 90°$
podemos decir que

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

Indicar el símbolo que corresponda.

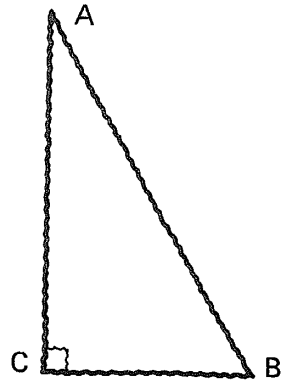


⊥

26

Recordemos que
en un triángulo rectángulo
hemos llamado
└──────────┘

a los lados que
determinan el ángulo recto.

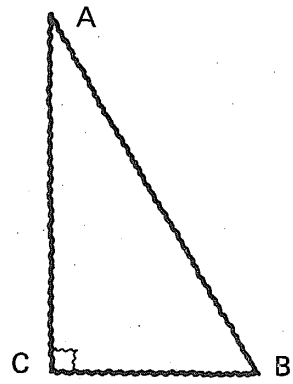


catetos

27

Al lado opuesto al ángulo recto le hemos dado el nombre de:

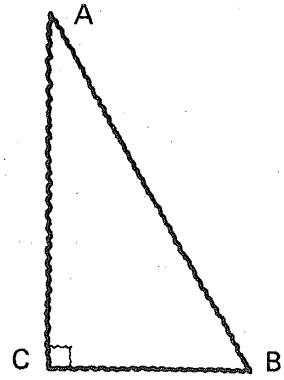
└_____┘



hipotenusa

28

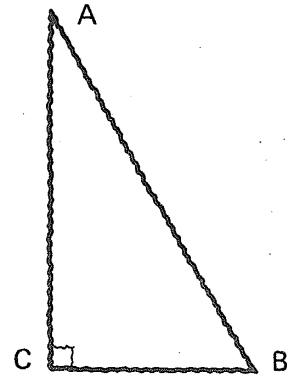
En el triángulo rectángulo representado,
└__┘ y └__┘
son los catetos,
y
└__┘
es la hipotenusa.



- $\overleftrightarrow{AC}$ - $\overleftrightarrow{CB}$
- $\overleftrightarrow{AB}$

29

En un triángulo rectángulo, el ángulo opuesto a la hipotenusa es└_____┘, y los ángulos opuestos a los catetos son└_____┘.



recto

agudos

4.5.1.1

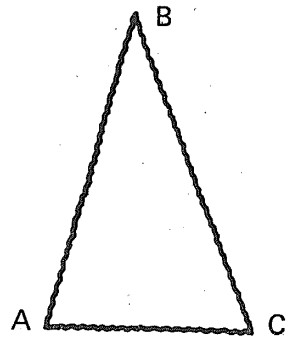
Práctica adicional de determinación de la medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, dada la medida del otro, si se considera necesario.

30

$\measuredangle A = 75° 32'$

$\measuredangle C = 68° 47'$

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋.



35° 41′

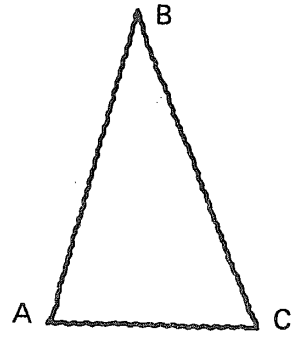
31

$\measuredangle A = 75° 32'$
$\measuredangle C = 68° 47'$
$\measuredangle B = 35° 41'$

Recordemos que:

Por tener sus tres ángulos interiores agudos
el triángulo ABC
es

⌊_____⌋



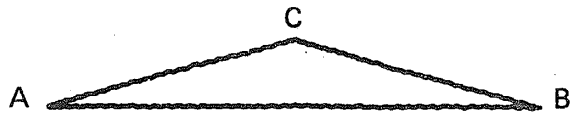
acutángulo

32

$\measuredangle A = 15° 10'$

$\measuredangle B = 15° 10'$

$\measuredangle C =$ ⌊_____⌋



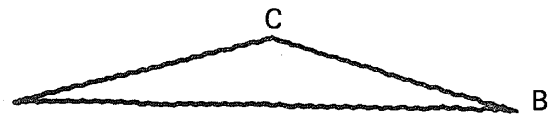
149° 40′

33

$\measuredangle A = 15° 10'$

$\measuredangle B = 15° 10'$

$\measuredangle C = 149° 40'$



El ángulo C es ⌊_____⌋
porque
su medida es

⌊_____⌋

obtuso

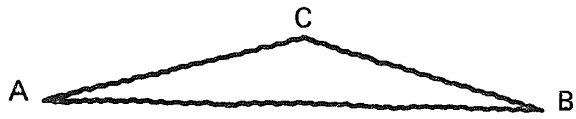
mayor de 90° y menor de 180°

34

$\measuredangle A = 15° 10'$

$\measuredangle B = 15° 10'$

$\measuredangle C = 149° 40'$



Por tener un ángulo interior obtuso
el triángulo ABC es

⌊_____⌋

obtusángulo

35

¿Puede un triángulo
tener
dos ángulos interiores
obtusos?

Sí/No

porque ⌊_____⌋

Atención

No

la suma de dos ángulos
obtusos es mayor
que 180°

36

¿Puede un triángulo
tener
dos ángulos interiores rectos?

Sí/No

porque ⌊_____⌋

No

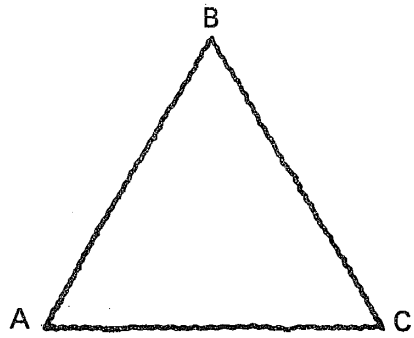
la suma de dos ángulos
rectos es igual a 180°,
el tercer ángulo debería
medir 0°, y en estas
condiciones no se define
un triángulo

37

$\measuredangle A = 60°$

$\measuredangle B = 60°$

$\measuredangle C =$ ⌊__⌋



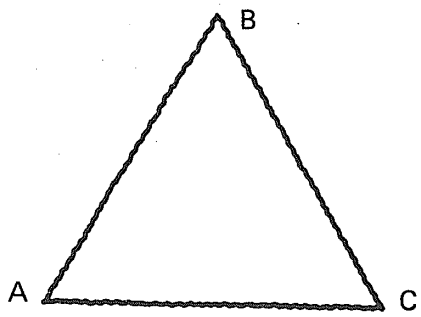
60°

38

$\measuredangle A = 60°$

$\measuredangle B = 60°$

$\measuredangle C = 60°$



Por tener sus tres ángulos interiores congruentes, al triángulo ABC se le denomina:

equiángulo.

4.5.1.2

Práctica adicional de determinación de la medida de un ángulo interior de un triángulo, dadas las medidas de los otros dos, si se considera necesario.

39

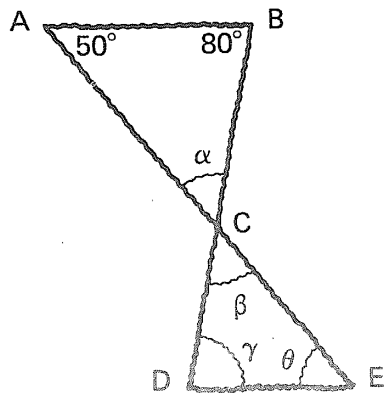
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

$\measuredangle \alpha =$ ⌊___⌋

$\measuredangle \beta =$ ⌊___⌋

$\measuredangle \gamma =$ ⌊___⌋

$\measuredangle \theta =$ ⌊___⌋



50°

50°

80°

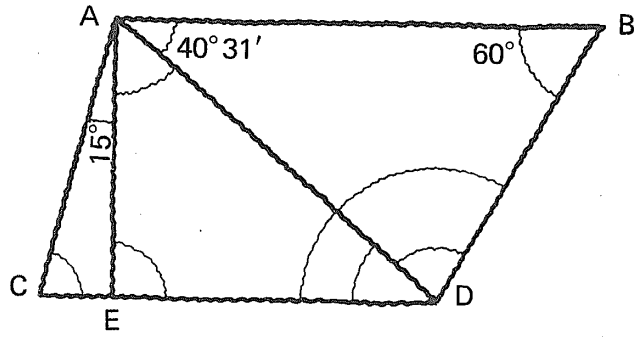
50°

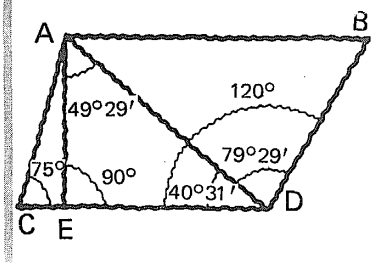
40

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

Calcular los ángulos indicados.

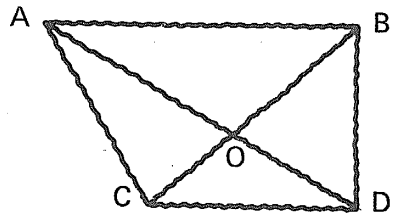


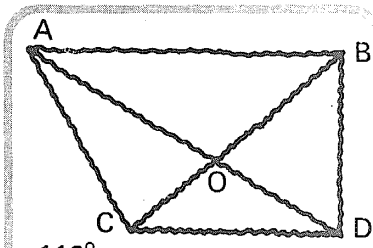


41

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$\measuredangle BAD = 30°$
$\measuredangle ABC = 40°$
$\measuredangle AOB =$ ⌊⌋
$\measuredangle COD =$ ⌊⌋
$\measuredangle CDA =$ ⌊⌋
$\measuredangle BCD =$ ⌊⌋
$\measuredangle CBD =$ ⌊⌋
$\measuredangle BOD =$ ⌊⌋
$\measuredangle ADB =$ ⌊⌋
$\measuredangle AOC =$ ⌊⌋





110°
110°
30°
40°
50°
70°
60°
70°

4.5.1.3

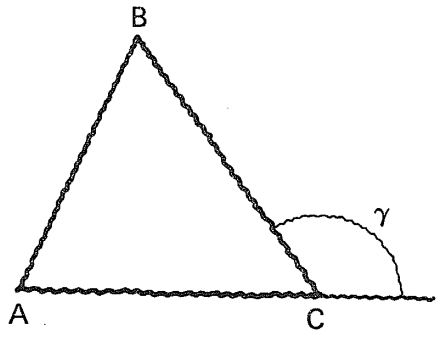
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

42

Conviene aquí
recordar que:
hemos llamado ángulo

[_____]

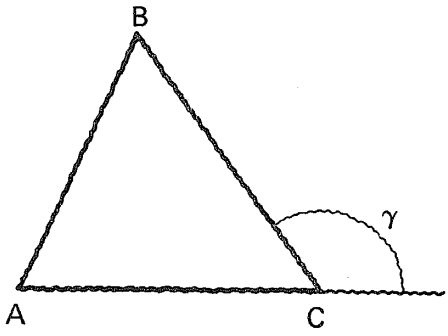
del triángulo ABC,
a un ángulo como el γ.



exterior

43

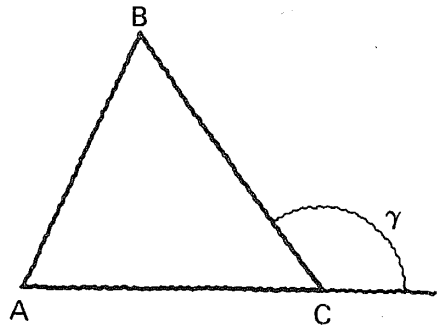
Habíamos ya
observado que
el ángulo interior C
y el ángulo exterior γ
son
adyacentes
(o suplementarios)



44

La suma de las medidas
de los ángulos C y γ
es igual a

[_____]



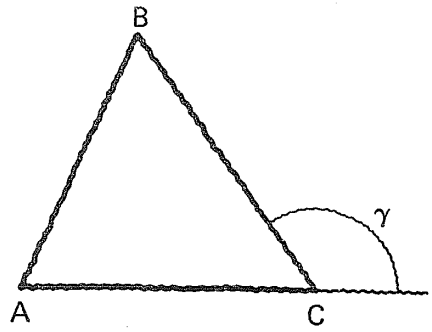
la medida de un ángulo
llano (180°)

45

Diremos que
los ángulos A y B
son

opuestos

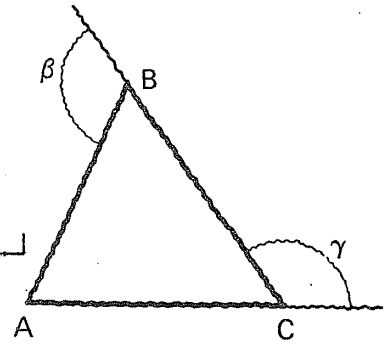
al ángulo exterior γ.



46

Similarmente,
el ángulo exterior β
es
_____
al
ángulo interior B.

Los ángulos interiores __ y __
son opuestos
al ángulo exterior β.

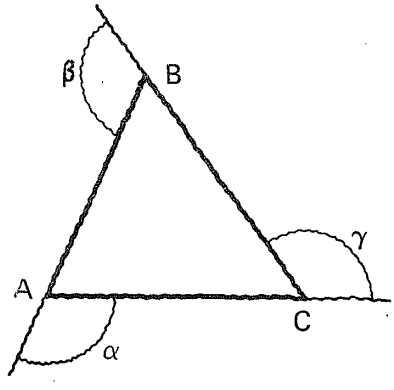


adyacente

A C

47

El ángulo interior __
es _____
al ángulo exterior α,
y
los ángulos interiores
__ y __
son _____
al ángulo exterior α.



A
adyacente

B C
opuestos

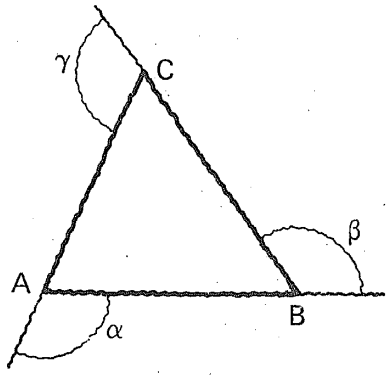
48

Si la unidad de medida empleada es el grado.

$\measuredangle A + \measuredangle \alpha =$ ⌊____⌋

$\measuredangle B + \measuredangle \beta =$ ⌊____⌋

$\measuredangle C + \measuredangle \gamma =$ ⌊____⌋



180°

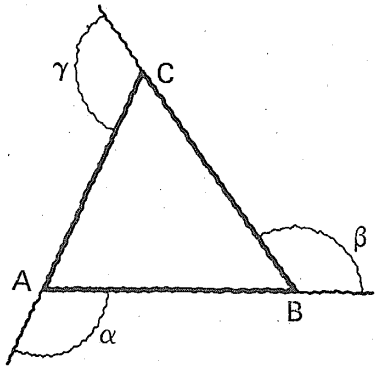
180°

180°

49

Estamos a punto de descubrir una importante relación entre un ángulo exterior y los ángulos interiores opuestos a él.

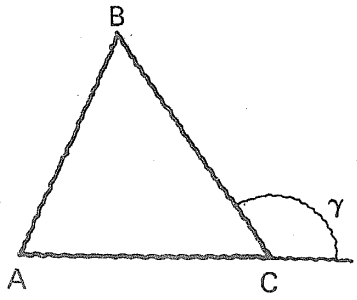
Observemos con atención la figura.



50

Vamos a demostrar esta **conjetura.**

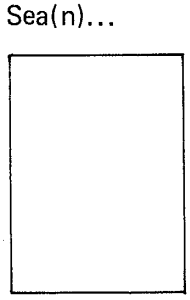
La medida de un ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos a él.

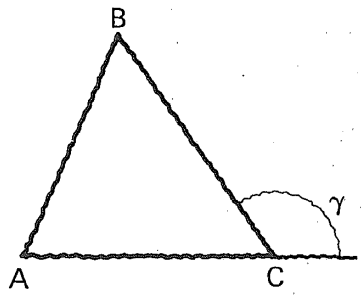


51

Hipótesis

Sea(n)...





Tesis o Conclusión

Demostrar que:

$\measuredangle\gamma = \measuredangle A + \measuredangle B$.

Por ejemplo:

$\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los ángulos interiores del $\triangle ABC$,
$\angle\gamma$ uno de los ángulos exteriores del $\triangle ABC$, de tal manera que:

$\angle\gamma$ es adyacente al $\angle C$.

$\measuredangle\gamma = \measuredangle A + \measuredangle B$.

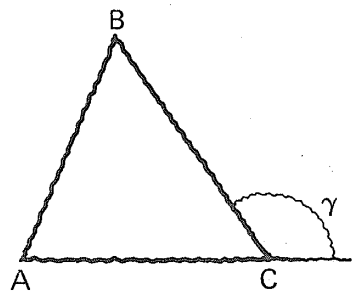
52

Sean
$\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los ángulos interiores del $\triangle ABC$,

- $\angle\gamma$ uno de los ángulos exteriores del $\triangle ABC$
- $\angle\gamma$ adyacente al $\angle C$.

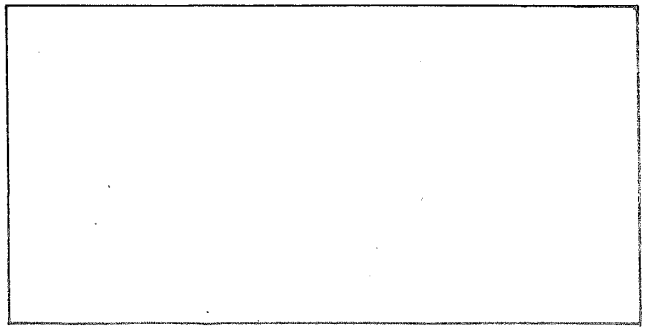
Demostrar que:

$\measuredangle\gamma = \measuredangle A + \measuredangle B$



53

Completar la demostración.



1. $\measuredangle\gamma + \measuredangle C = 180°$	1. Hipótesis: $\angle\gamma$ es adyacente al $\angle C$.
2. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$	2. Teorema 9.
3. $\measuredangle\gamma + \measuredangle C = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$	3. Transitividad P3: 1 y 2
$\vdash$	
4. $\measuredangle\gamma = \measuredangle A + \measuredangle B$ LCDD	4. P4 aditividad.

Teorema 10.

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos (o no adyacentes) a él.

4.5.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* el **teorema 9:**

  la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°;

- *demostrar* el **teorema 10:**

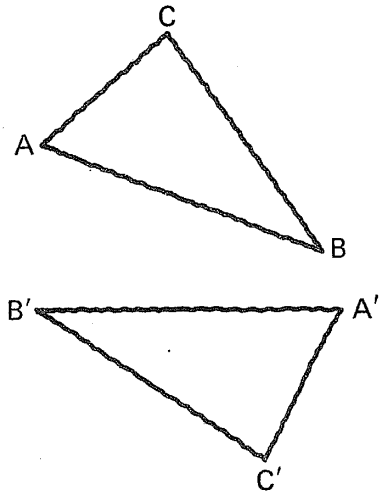
  la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos opuestos (no adyacentes) a él.

5.2

Congruencia de triángulos

55

Diremos que:
dos
triángulos
son
congruentes
si y sólo si
se cumple la condición dada
en el cuadro siguiente.



56

Los lados y los **ángulos interiores**

de uno de ellos
son respectivamente

congruentes

a los lados y los ángulos interiores
del otro.

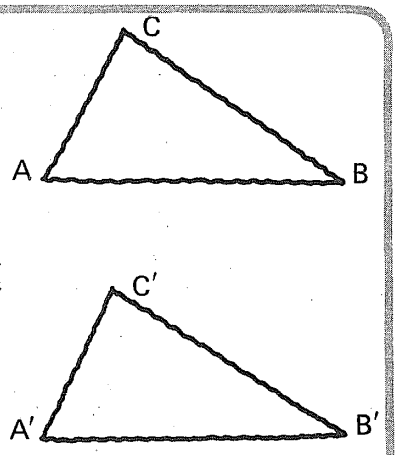
57

En otras palabras:

los dos triángulos son "superponibles".

Si "colocamos uno sobre el otro" coinciden en todos sus puntos.

Uno de los triángulos es una "copia" del otro.



58

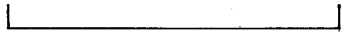
Si

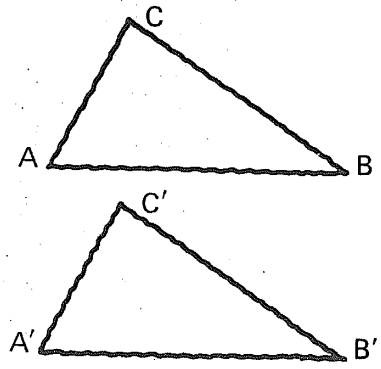
$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{A'C'}$ $\quad \angle A \approx \angle A'$

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{A'B'}$ $\quad \angle B \approx \angle B'$

$\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{B'C'}$ $\quad \angle C \approx \angle C'$

entonces, de acuerdo con la definición anterior:





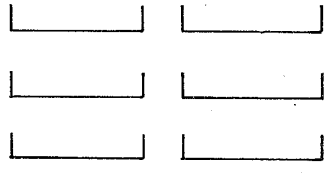
$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

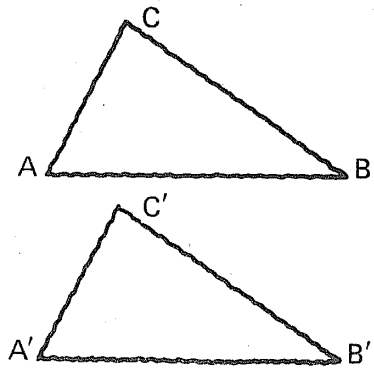
59

Si

$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

entonces:





$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{A'B'}$ $\quad \angle A \approx \angle A'$

$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{A'C'}$ $\quad \angle B \approx \angle B'$

$\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{B'C'}$ $\quad \angle C \approx \angle C'$

60

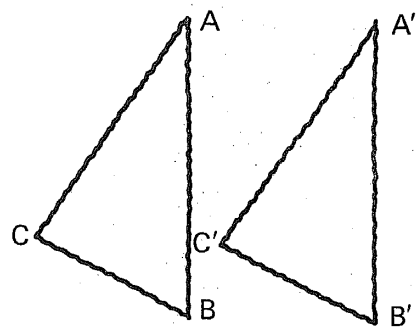
Diremos que:
si
$\overleftrightarrow{AC} \approxeq \overleftrightarrow{A'C'}$

$\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$

son homólogos

ó

$\overleftrightarrow{AC}$ **es homólogo** de $\overleftrightarrow{A'C'}$.



Lo mismo podemos decir de los otros lados.

61

Si $\angle A \approxeq \angle A'$

$\angle A$ y A'

son homólogos

ó

$\angle A$ es homólogo del $\angle A'$

e igualmente, para los otros ángulos.

62

$\overleftrightarrow{AB} \approxeq \overleftrightarrow{QR}$ $\quad \measuredangle A = \measuredangle R$

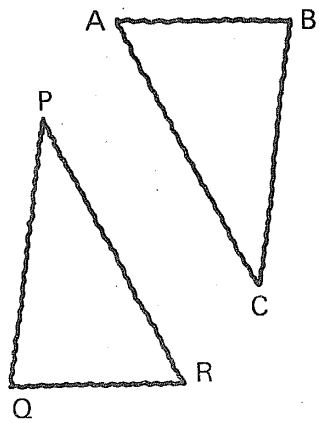
$\overleftrightarrow{AC} \approxeq \overleftrightarrow{PR}$ $\quad \measuredangle B = \measuredangle Q$

$\overleftrightarrow{BC} \approxeq \overleftrightarrow{PQ}$ $\quad \measuredangle C = \measuredangle P$

El homólogo del lado $\overleftrightarrow{AC}$ es [ ]; el homólogo del $\angle A$ es [ ].

Los lados $\overleftrightarrow{AB}$ y [ ] son homólogos.

Los ángulos C y [ ] son homólogos.



$\overleftrightarrow{PR}$
$\angle R$

$\overleftrightarrow{QR}$

P

63

Para probar que dos triángulos son congruentes, no es necesario verificar la congruencia de los tres pares de lados y de los tres pares de ángulos.

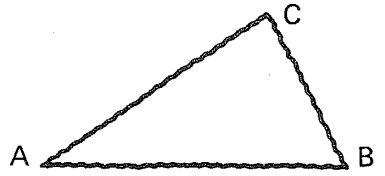
Basta con que se cumplan algunas relaciones de congruencia entre los elementos de ambas figuras para concluir que son congruentes.

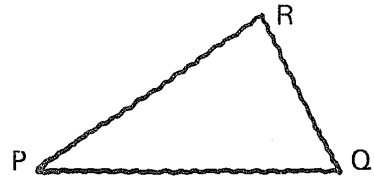
64

C1. Basta con probar que:

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
$\overline{AC} \cong \overline{PR}$
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$

los tres lados respectivamente congruentes





para concluir que

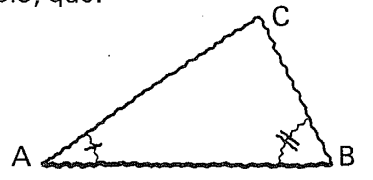
$\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

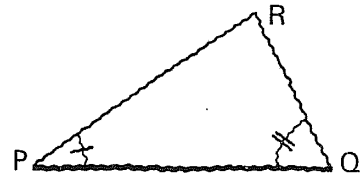
65

C2. Basta con probar, por ejemplo, que:

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
$\angle A \cong \angle P$
$\angle B \cong \angle Q$

un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente congruentes





para concluir que

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

66

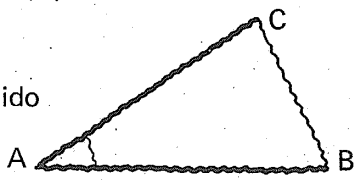
C3. Basta con probar, por ejemplo, que:

$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{PR}$

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{PQ}$

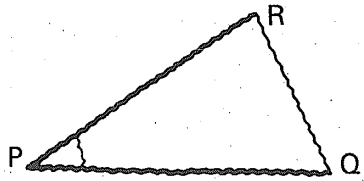
$\angle A \approx \angle P$

} dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes



para concluir que

$\triangle ABC \approx \triangle PQR$.



67

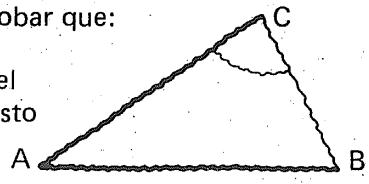
C4. Basta, por ejemplo, con probar que:

$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{A'B'}$

$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{A'C'}$

$\angle ACB \approx \angle A'C'B'$

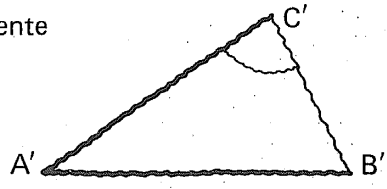
} dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente congruentes



en que

$|\overleftrightarrow{AB}| > |\overleftrightarrow{AC}|$

para concluir que



$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.

68

Expresemos más formalmente estos cuatro

criterios de congruencia

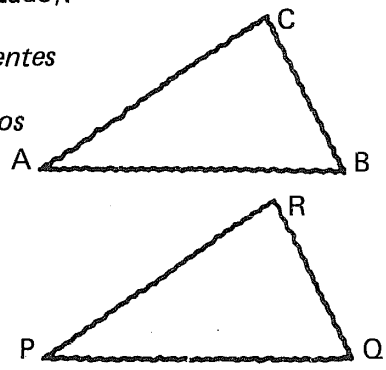
que aceptaremos sin demostración.

Ver cuadros siguientes.

69

C1. Criterio LLL (Lado-Lado-Lado).

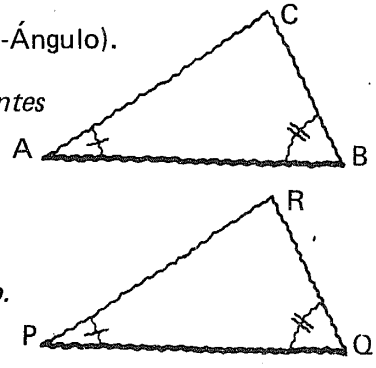
Dos triángulos son congruentes
si y sólo si
los tres lados de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres lados del otro.



70

C2. Criterio ALA (Ángulo-Lado-Ángulo).

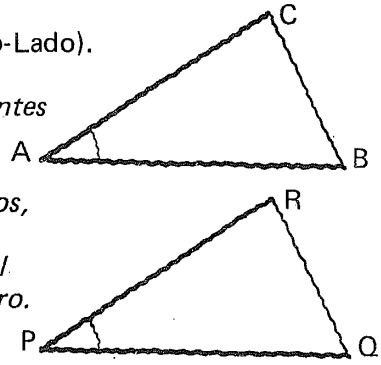
Dos triángulos son congruentes
si y sólo si
un lado y sus ángulos adyacentes de uno de ellos son respectivamente congruentes a un lado y sus ángulos adyacentes del otro.



71

C3. Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado).

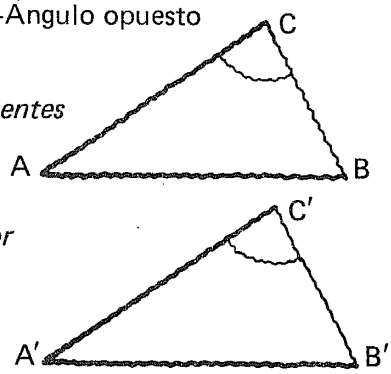
Dos triángulos son congruentes
si y sólo si
dos lados y el ángulo comprendido de uno de ellos, son respectivamente congruentes a dos lados y el ángulo comprendido del otro.



72

C4. Criterio LLA (Lado-Lado-Ángulo opuesto al lado mayor).

Dos triángulos son congruentes si y sólo si *tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.*



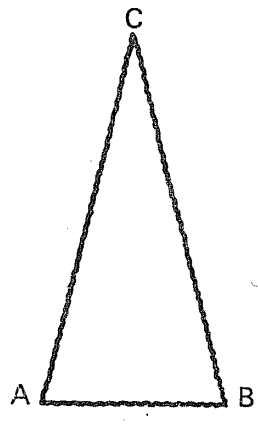
73

Aceptadas las proposiciones anteriores,
podemos demostrar,
a partir de ellas
otras proposiciones
relacionadas
con los triángulos.

74

Demostremos que:

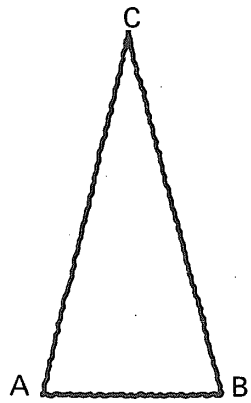
Si *un triángulo es isósceles,*
entonces *los ángulos internos opuestos a los lados congruentes son congruentes.*



75

Hipótesis:

Tesis o conclusión:



Por ejemplo:

- Sea ABC un triángulo isósceles en que:

  $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$

- Demostrar que:

  $\angle B \cong \angle A$

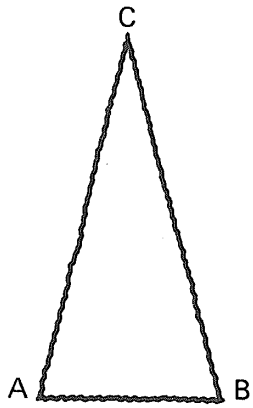
76

Sea ABC un $\triangle$ isósceles en que $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$

Demostrar que

$\angle B \cong \angle A$

Partiremos de la idea de dividir el triángulo dado en dos triángulos congruentes.

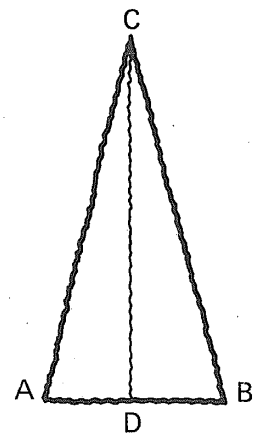


77

Trazamos $\overrightarrow{CD}$ bisectriz del $\angle C$.

Entonces,

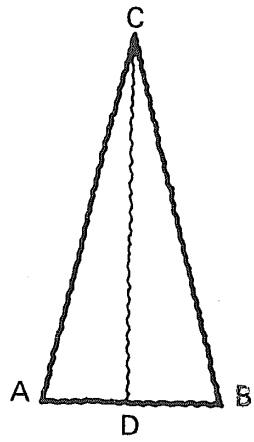
1. $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$ 1. ⌊_____⌋



Por hipótesis

78

1.	$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BC}$	1. Hipótesis.
2.	$\overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{CD}$	2. ⌊_____⌋



P1: reflexividad de la relación de congruencia

79

1.	$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BC}$	1. Hipótesis.
2.	$\overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{CD}$	2. P1: reflexividad.
3.	$\angle ACD \approx \angle DCB$	3. ⌊_____⌋

Hipótesis adicional ($\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$) y definición de bisectriz

80

1.	$\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BC}$	1. Hipótesis.
2.	$\overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{CD}$	2. P1: reflexividad.
3.	$\angle ACD \approx \angle DCB$	3. $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$.
4.	$\triangle ADC \approx \triangle DCB$	4. ⌊_____⌋

Criterio C3 (LAL) de congruencia de triángulos

81

1.	$\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$	1. Hipótesis.
2.	$\overleftrightarrow{CD} \cong \overleftrightarrow{CD}$	2. P1: reflexividad.
3.	$\angle ACD \cong \angle DCB$	3. $\overleftrightarrow{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$.
4.	$\triangle ADC \cong \triangle DCB$	4. C3. LAL.
5.	$\llcorner_____\lrcorner$.	5. $\llcorner_____\lrcorner$.

- $< A \cong < B$
- lados homólogos de triángulos congruentes son congruentes

82

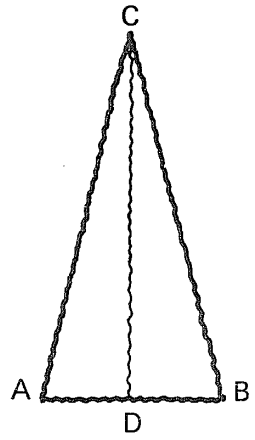
Estudiar con atención la demostración completa.

Teorema 11.

Si *un triángulo es isósceles*
entonces *los ángulos interiores opuestos a los lados congruentes son congruentes.*

Sea ABC un $\triangle$ isósceles en que $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$.

Demostrar que: $\angle B \cong \angle A$.



83

Trazamos: $\overleftrightarrow{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$.

Demostración

Proposiciones:		Razones:
1.	$\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BC}$	1. Hipótesis.
2.	$\overleftrightarrow{CD} \cong \overleftrightarrow{CD}$	2. P1: reflexividad.
3.	$\angle ACD \cong \angle DCB$	3. Hipótesis adicional.
4.	$\triangle ACD \cong \triangle DCB$	4. C3. LAL.
5.	$\angle A \cong \angle B$	5. Congruencia de homólogos.
$\vdash$		
6.	$\angle B \cong \angle A$	6. P2: simetría de la relación de congruencia.

LCDD

84

Teorema 11.

Si *un triángulo es isósceles,*
entonces *los ángulos interiores opuestos a los lados congruentes son congruentes.*

85

Puede demostrarse que

el **recíproco del teorema 11**

es verdadero y
podemos enunciarlo así:

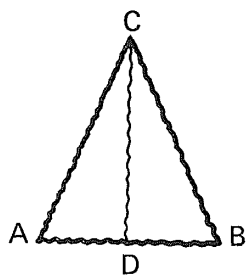
Si *dos ángulos interiores de un triángulo son congruentes,* entonces *los lados opuestos a dichos ángulos son congruentes*
(es decir: *el triángulo es isósceles*).

86

Observemos algunas propiedades interesantes del

triángulo isósceles.

Por ejemplo:



vemos que siendo $\triangle ACD \cong \triangle DCB$,
se verifica que: $\triangle ADC \cong \angle BDC$
por lo tanto $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC =$ ⌊⌋

Dar la medida en grados.

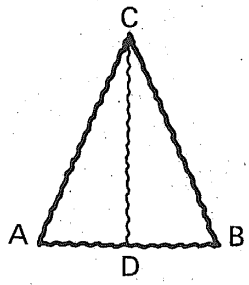
90°

87

Si $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC$
podemos escribir:

$\overleftrightarrow{CD} \llcorner\!\lrcorner \overleftrightarrow{AB}$

↑
Indicar el símbolo que corresponda.

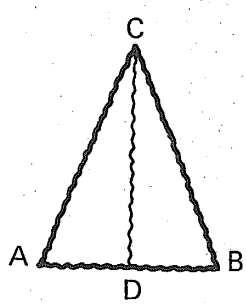


$\perp$

88

También

$\overrightarrow{AD} \approx \llcorner\!\lrcorner$

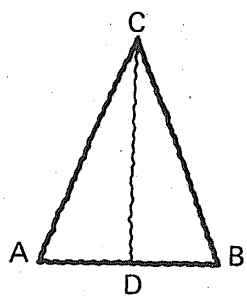


$\overrightarrow{DB}$

89

Si $\overrightarrow{AD} \approx \overrightarrow{DB}$

D es el $\llcorner\!_____\lrcorner$ de $\overrightarrow{AB}$.



punto medio

90

Recordemos que
si D es el

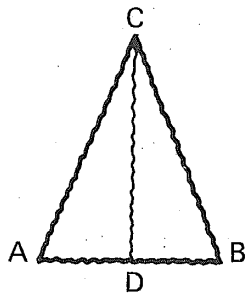
punto medio

de $\overleftrightarrow{AB}$

y $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

entonces

$\overleftrightarrow{CD}$ es la [_____] de $\overleftrightarrow{AB}$.

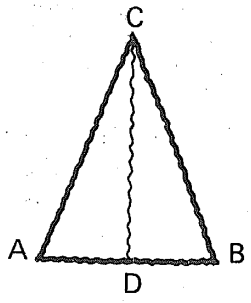


mediatriz

91

Sabemos que

$\overrightarrow{CD}$ es [_____] del $\angle ACB$.



bisectriz

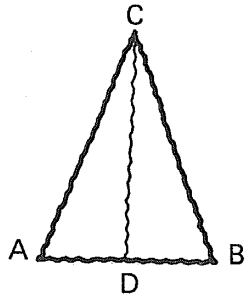
92

Además,

por ser $\overline{CD}$ el segmento cuyos extremos son:

- el punto medio (D) de un lado ($\overleftrightarrow{AB}$)
  y
- el vértice opuesto (C)

es una [_____] del triángulo ABC.



mediana

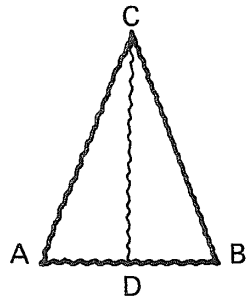
93

Y todavía más,

por ser $\overline{CD}$ la

distancia

del vértice C
a la recta que contiene al
lado $\overleftrightarrow{AB}$
es una
└_____┘ del △ABC.

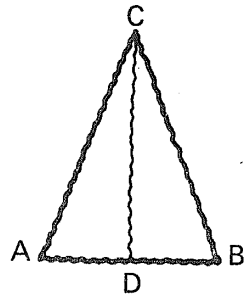


altura

94

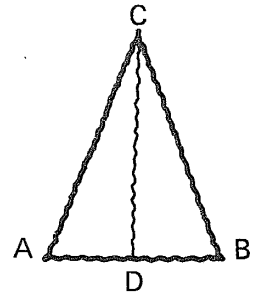
Resumiendo:

- $\overleftrightarrow{CD}$ es una de las **bisectrices** del △ABC.
- $\overleftrightarrow{CD}$ es una de las **mediatrices** del △ABC.
- $\overline{CD}$ es una de las **medianas** del △ABC.
- $\overline{CD}$ es una de las **alturas** del △ABC.



95

$\overline{CD}$ divide al triángulo isósceles ABC en dos triángulos rectángulos congruentes.



96

El $\triangle ABC$ es isósceles en que

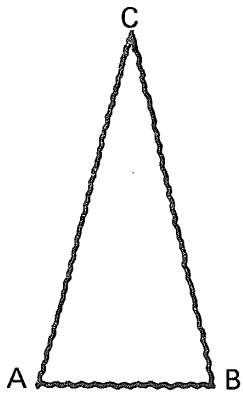
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\measuredangle C = 27°$

Se requiere conocer

$\measuredangle A =$ [ ]

$\measuredangle B =$ [ ]



$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle A + \measuredangle B = 180° - 27°$

$= 153°$

por T11: $\measuredangle A = \measuredangle B$

entonces: $\measuredangle A = \measuredangle B$

$= \frac{153°}{2} = 76.5°$

76° 30′

76° 30′

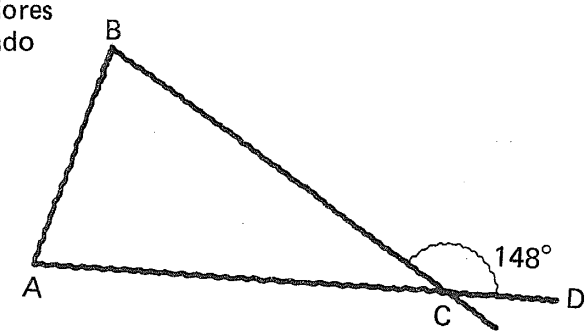
97

Se requiere determinar las medidas de los ángulos interiores del $\triangle ABC$ sabiendo que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\measuredangle C =$ [ ]

$\measuredangle B =$ [ ]

$\measuredangle A =$ [ ]



Por T11: $\measuredangle A = \measuredangle B$

32°

74°

74°

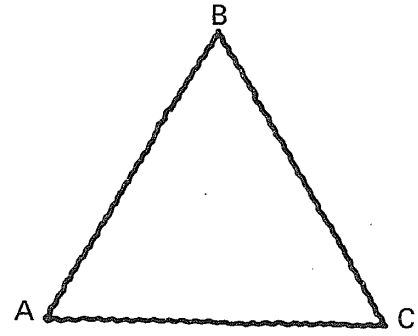
98

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

El $\triangle ABC$ representado es

[ ]

por tener sus tres lados congruentes.



equilátero

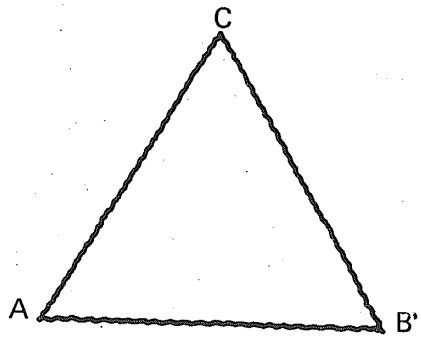
99

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

¿Es el $\triangle ABC$ isósceles?

Sí/No

porque



Sí

tiene (al menos) dos lados congruentes

100

¿Podemos afirmar que

todo triángulo equilátero es isósceles?

Sí/No

Sí

101

¿Podemos afirmar que

todo triángulo isósceles es equilátero?

Sí/No

No

102

¿Podemos afirmar que

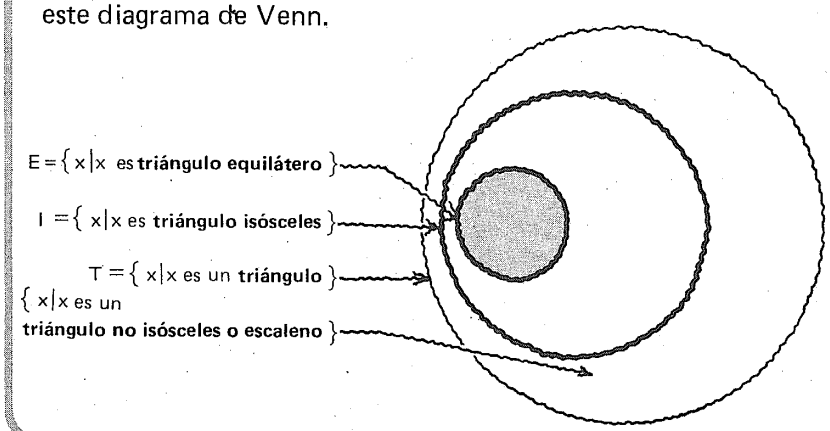
algunos triángulos isósceles son equiláteros?

Sí/No

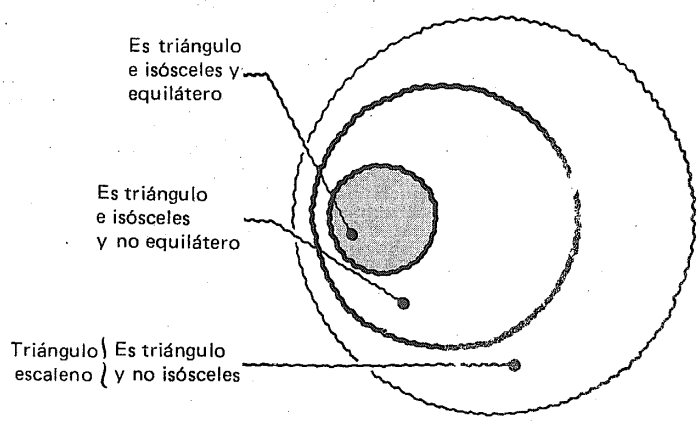
Sí

103

Observemos
este diagrama de Venn.



104



105

Las propiedades que hemos descubierto para los triángulos isósceles,
¿se cumplen para los triángulos equiláteros?

Sí/No

porque

└_____┘

Sí

todos los triángulos equiláteros son isósceles

106

Las propiedades que hemos descubierto para los triángulos isósceles,
¿se cumplen para los triángulos escalenos?

Sí/No

porque

└_____┘

No

los triángulos escalenos no son isósceles

107

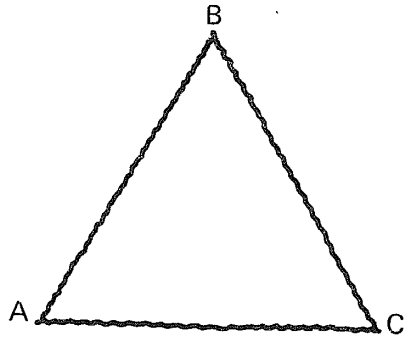
Dar las medidas en grados.

△ABC es equilátero.

$\measuredangle A =$ └___┘

$\measuredangle B =$ └___┘

$\measuredangle C =$ └___┘



- 60°
- 60°
- 60°

Por teorema 11

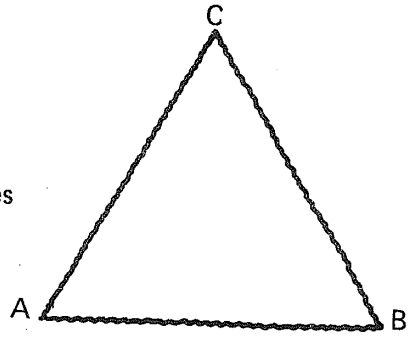
$\measuredangle A = \measuredangle B$ porque $\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AC}$
$\measuredangle B = \measuredangle C$ porque $\overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{AB}$
$\measuredangle A = \measuredangle C$ porque $\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AB}$

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

108

△ABC es equilátero.

Por tener sus ángulos interiores congruentes el △ABC es ⌊_____⌋



equiángulo

109

¿Podríamos afirmar que

un triángulo es equilátero
si y sólo si
es equiángulo?

Sí/No

Sí

110

¿Podríamos afirmar que

un triángulo es isósceles
si y sólo si
es equiángulo?

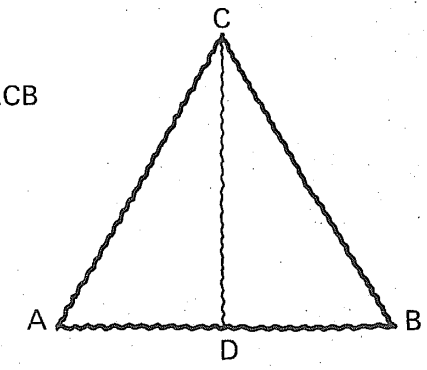
Sí/No

No

111

Si $\begin{cases} \triangle ABC \text{ es equilátero, y} \\ \overleftrightarrow{CD} \text{ es la bisectriz del } < ACB \end{cases}$

$\measuredangle BAC = ___$
$\measuredangle ABC = ___$
$\measuredangle ACB = ___$
$\measuredangle ACD = ___$
$\measuredangle DCB = ___$
$\measuredangle ADC = ___$
$\measuredangle CDB = ___$



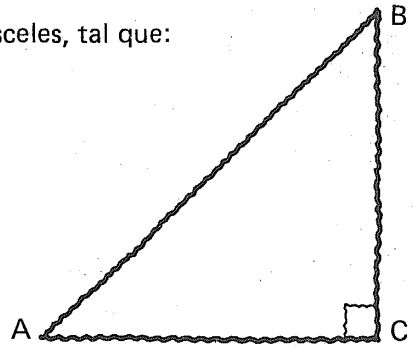
60°
60°
60°
30°
30°
90°
90°

112

Si $\begin{cases} \triangle ABC \text{ es rectángulo e isósceles, tal que:} \\ \measuredangle C = 90° \wedge \overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BC} \end{cases}$

$\measuredangle A = ___$

$\measuredangle B = ___$



45°

45°

113

Si $\begin{cases} \overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{ED} \\ \text{y} \\ \measuredangle ABC = 85°: \end{cases}$

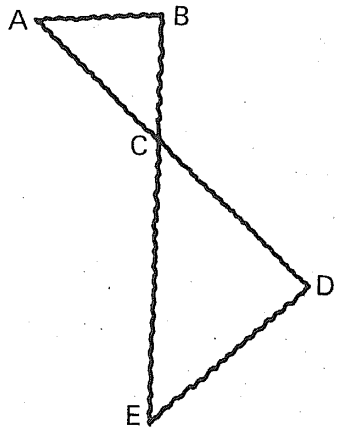
$\measuredangle BAC = ___$

$\measuredangle ACB = ___$

$\measuredangle DCE = ___$

$\measuredangle CDE = ___$

$\measuredangle CED = ___$



47°30′

47° 30′

47° 30′

85° 00′

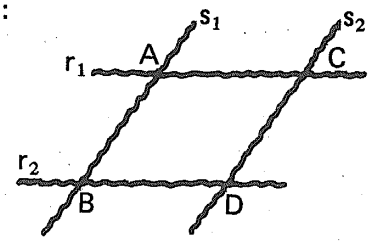
47° 30′

4.5.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

Ahora, queremos demostrar que:

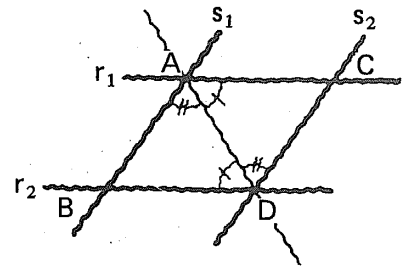
Si
$r_1 \parallel r_2$
$s_1 \parallel s_2$
entonces
$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BD}$



(Sugerencia: trazar $\overleftrightarrow{AD}$)

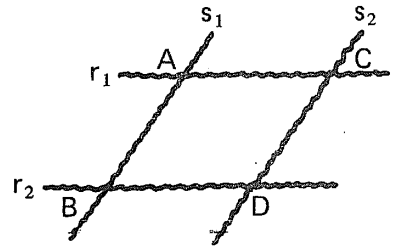
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1.	$\overleftrightarrow{AD} \approx \overleftrightarrow{AD}$	1.	P_1
2.	$\angle DAC \approx \angle ADB$	2.	T5
3.	$\angle BAD \approx \angle ADC$	3.	T5
4.	$\triangle ABD \approx \triangle ADC$	4.	C2. ALA
5.	$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{AC} \approx \overleftrightarrow{BD}$	5.	Congruencia de homólogos.
	LCDD		



Teorema 12.

Los segmentos determinados en dos rectas paralelas, por la intersección con otras dos paralelas, son congruentes.



4.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* con sus propias palabras el concepto de congruencia de triángulos;
- *dar* los cuatro criterios de congruencia de triángulos;
- *demostrar* el **teorema 11:**

  dos ángulos interiores de un triángulo son congruentes si y sólo si los lados opuestos a dichos ángulos son congruentes;

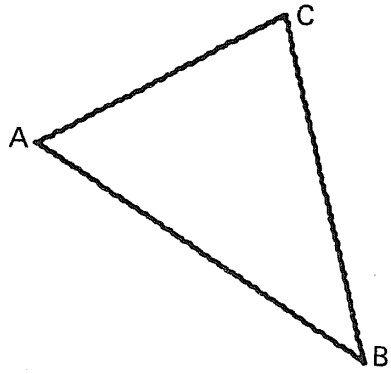
- *determinar* las medidas de algunos ángulos, en figuras conteniendo triángulos en diversas disposiciones.

5.3

Cuadriláteros convexos. Elementos

116

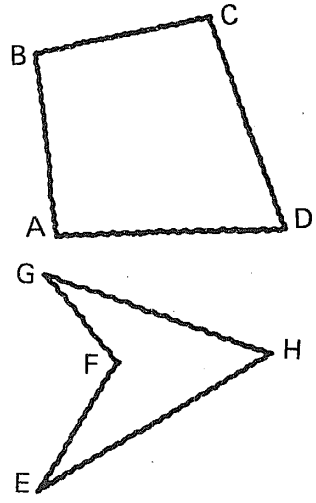
Hemos definido un **triángulo** como un **polígono** formado por la **unión** de **tres segmentos** de recta, que llamamos los **lados** del triángulo.



117

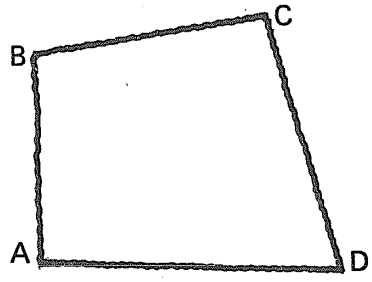
Definiremos, ahora, un **cuadrilátero** como un **polígono** de **cuatro lados.**

Existen **cuadriláteros convexos** y **cuadriláteros cóncavos.**



118

En el
cuadrilátero convexo ABCD
los
lados
son [_____]
los
vértices
son [_____]
los
ángulos interiores
son [_____]



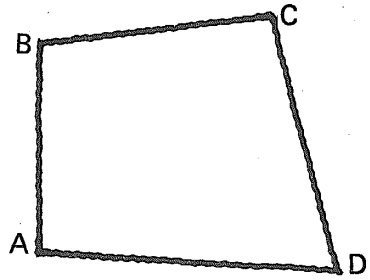
- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$
- A, B, C, D

∠DAB, ∠ABC, ∠BCD, ∠CDA
o bien:
- ∠A, ∠B, ∠C, ∠D

119

Señalar la opción correcta.

Debemos recordar, que,
como en todo polígono,
los lados
son/no son
subconjuntos del cuadrilátero;
los vértices
son/no son
subconjuntos del cuadrilátero;
los
ángulos interiores
son/no son
subconjuntos del cuadrilátero.



son

son

no son

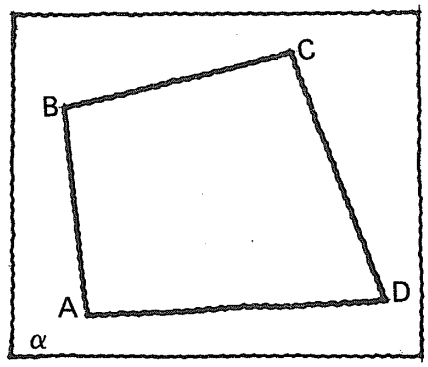
120

También en un cuadrilátero
podemos
identificar
tres zonas:

[_____]

[_____]

[_____]



(en cualquier orden)
- interior
- exterior

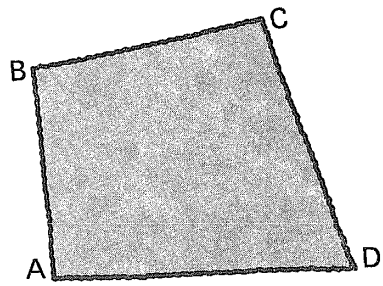
el cuadrilátero mismo
ó
- frontera

121

La unión del cuadrilátero
y su interior
definen lo que podríamos
llamar
un(a)

_____

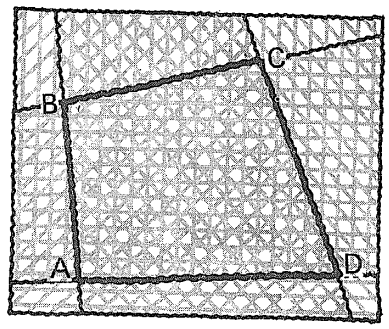
que podemos considerar
como la intersección
de cuatro semiplanos.



región cuadrilateral

122

Región cuadrilateral ABCD =
$[\overleftrightarrow{AD}, B) \cap [\overleftrightarrow{AB}, C) \cap [\overleftrightarrow{BC}, D)$
$\cap [\overleftrightarrow{CD}, A)$



123

A un par de

vértices

que constituyen los

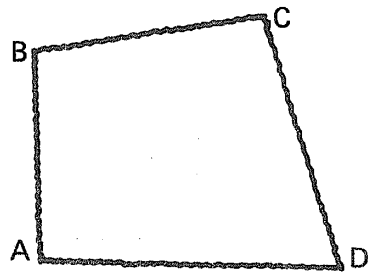
extremos de un lado

les llamaremos

consecutivos.

A los vértices no consecutivos
les llamaremos, también,

opuestos.



124

En el cuadrilátero convexo ABCD son

consecutivos

los pares de vértices

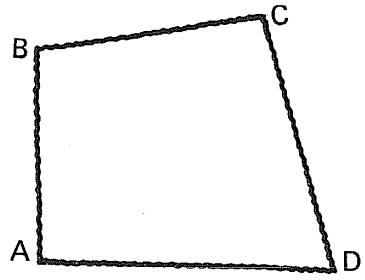
└──────────┘

Son

opuestos

los pares de vértices

└──────────┘



A y B, B y C, C y D, D y A

A y C, B y D

125

Un par de

vértices consecutivos

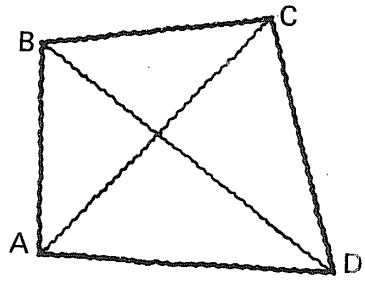
determinan
un lado del cuadrilátero convexo.

Un par de

vértices no consecutivos u opuestos

determinan lo que llamaremos una

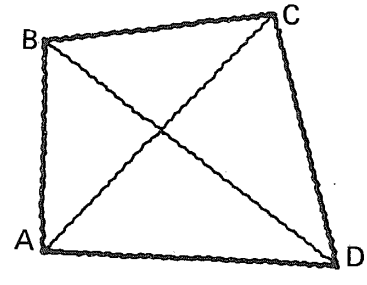
diagonal.



126

En un cuadrilátero convexo hay
└─┘ pares de vértices consecutivos, que determinan los └─┘ lados del cuadrilátero.

Y hay └─┘ pares de vértices opuestos, que determinan las └─┘ diagonales del cuadrilátero convexo.



4

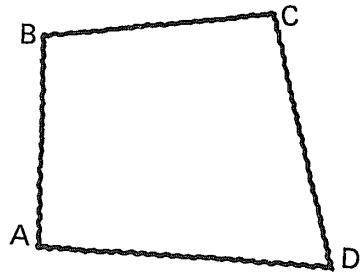
4

2

2

127

A dos
lados
cuya intersección
es
un vértice del cuadrilátero
les llamaremos
consecutivos.
A los lados
no consecutivos
les llamaremos, también,
opuestos.



128

En el cuadrilátero
convexo ABCD,
son

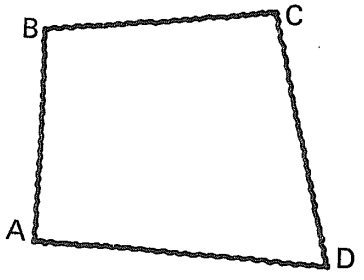
consecutivos

los pares de lados:
└_____┘

son

opuestos

los pares de
lados: └_____┘



$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CD}$,
$\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{DA}$ y $\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$

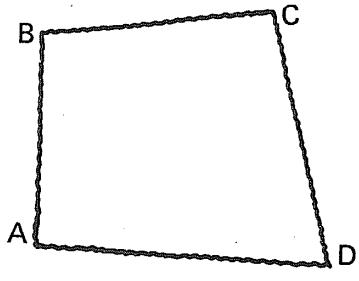
129

A los pares de ángulos interiores
cuyos vértices
son vértices consecutivos del
cuadrilátero convexo
les llamaremos

consecutivos.

A los ángulos interiores
no consecutivos
les llamaremos, también

opuestos.



130

En el cuadrilátero convexo ABCD, son

consecutivos

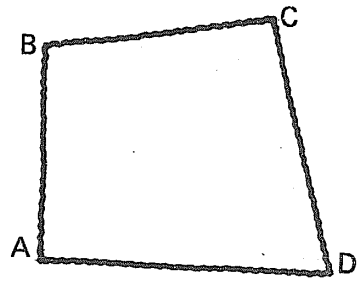
los pares de ángulos interiores:

[_____]

y son

opuestos

los pares de ángulos interiores: [_____]



• $\angle A$ y $\angle B$, $\angle B$ y $\angle C$, $\angle C$ y $\angle D$, $\angle D$ y $\angle A$

• $\angle A$ y $\angle C$, $\angle B$ y $\angle D$

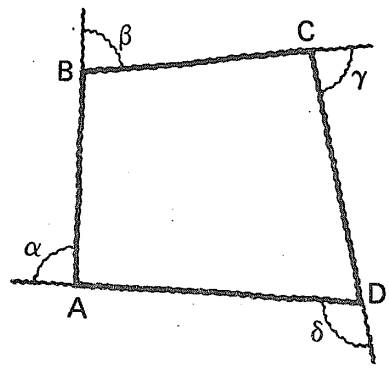
131

En un cuadrilátero convexo podemos hablar, también, de

ángulos exteriores.

$\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$ y $\angle\delta$ son los ángulos exteriores del cuadrilátero ABCD.

Se verifica que,
$\measuredangle A + \measuredangle\alpha =$ [_____].



180°

4.5.3.1

Práctica de identificación de los elementos de un cuadrilátero convexo, si
se considera necesario.

4.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* un cuadrilátero;

- *identificar* los siguientes elementos de un cuadrilátero convexo dado:

  —vértices (consecutivos/opuestos),
  —lados (consecutivos/opuestos),
  —ángulos interiores (consecutivos/opuestos),
  —ángulos exteriores,
  —diagonales.

5.4

Cuadriláteros convexos.
Clasificación.

132

Vamos, ahora, a hacer un intento
de
clasificación
de los
cuadriláteros convexos.

133

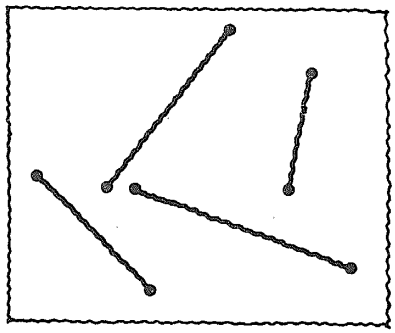
Consideremos

cuatro segmentos

distintos en un plano,
y la

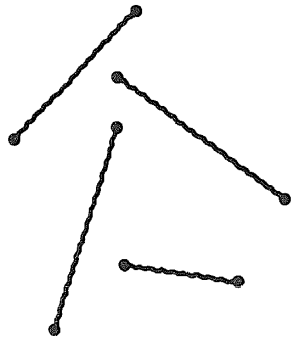
relación de paralelismo

como criterio para caracterizar
las diferentes clases
de cuadriláteros convexos.



134

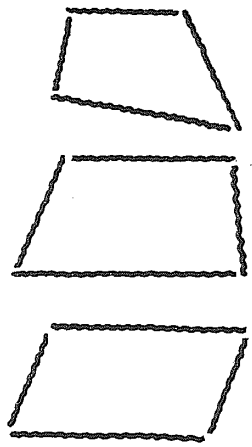
Empezamos preguntándonos de qué manera podemos disponer los cuatro segmentos cualesquiera, para formar un cuadrilátero convexo, teniendo en cuenta la relación de paralelismo entre ellos.



135

Veamos.

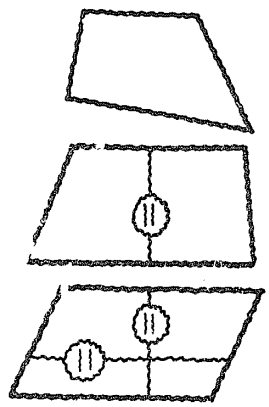
1. Ningún segmento paralelo a otro.
2. Al menos un par de segmentos paralelos entre sí.
3. Dos pares de segmentos paralelos entre sí.



136

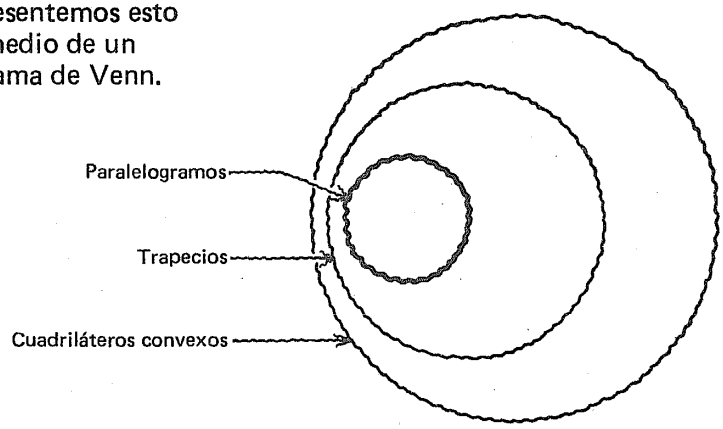
Definimos así
tres clases de cuadriláteros convexos,
que llamaremos:

1. **Cuadriláteros no trapecios.**
   - (lados opuestos no paralelos)
2. **Trapecios.**
   - (al menos un par de lados opuestos paralelos)
3. **Paralelogramos.**
   - (los dos pares de lados opuestos paralelos)



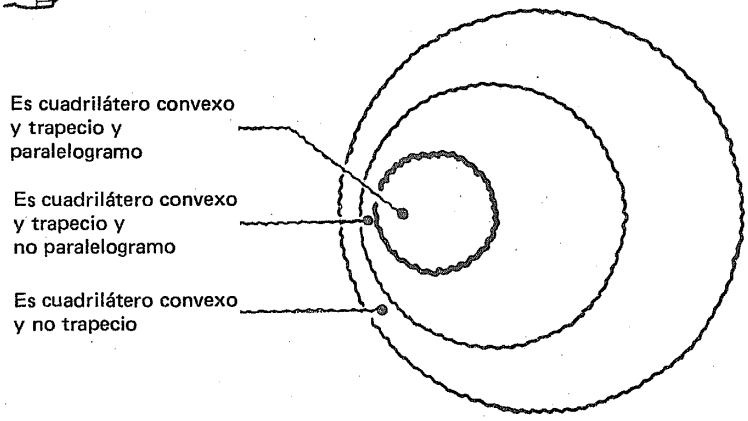
137

Representemos esto por medio de un diagrama de Venn.



138

Estudiar con atención.

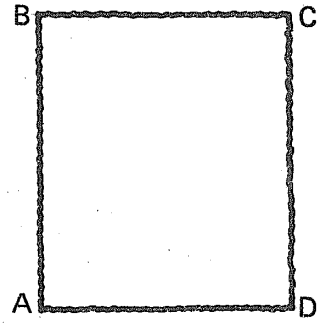


139

Atención.

Si sabemos o podemos probar que: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, concluimos que el cuadrilátero ABCD es un

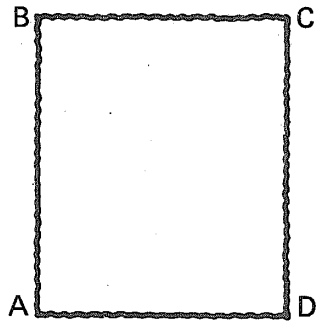
_____



paralelogramo

140

Si sabemos o podemos probar que: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ V $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$,* concluimos que el cuadrilátero ABCD es un

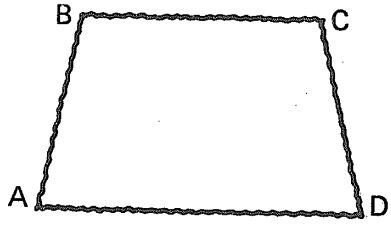


*Debemos recordar que V es el símbolo de la disyunción exclusiva.

trapecio

141

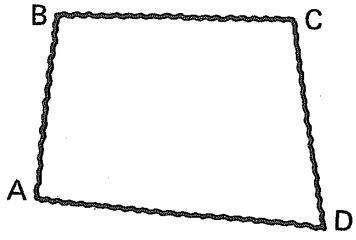
Si sabemos o podemos probar que $(\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \nparallel \overleftrightarrow{AD})$ V $(\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD} \wedge \overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{CD})$ concluimos que el cuadrilátero ABCD es un



trapecio no paralelogramo

142

Si sabemos o podemos probar que $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \nparallel \overleftrightarrow{AD}$ concluimos que el cuadrilátero ABCD es un



cuadrilátero no trapecio

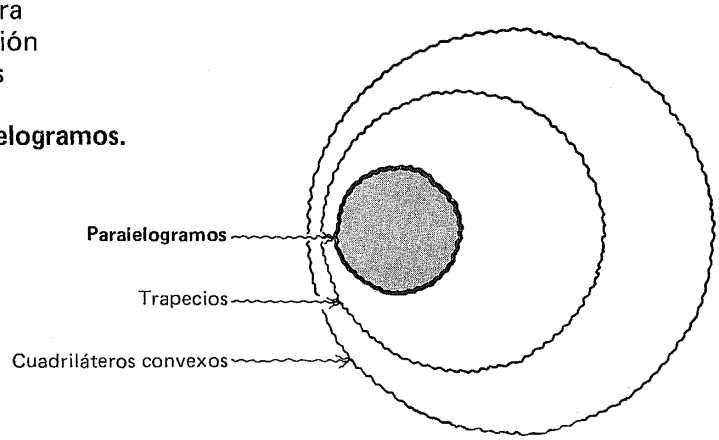
4.5.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

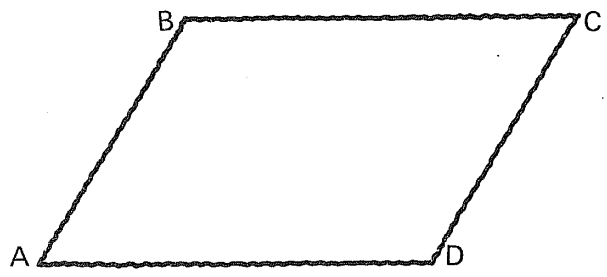
143

Concentremos
nuestra
atención
en los

paralelogramos.



144



Por definición:

ABCD es un paralelogramo $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

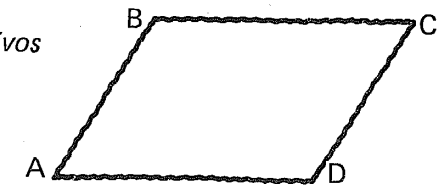
145

Enunciaremos algunas proposiciones
relacionadas con los
paralelogramos,
las cuales
serán demostradas,
si se considera necesario.

146

Teorema 13.

Un cuadrilátero es un paralelogramo
si y sólo si
sus ángulos consecutivos son suplementarios.



Visualicemos la verdad de esta proposición observando con atención la figura adjunta.

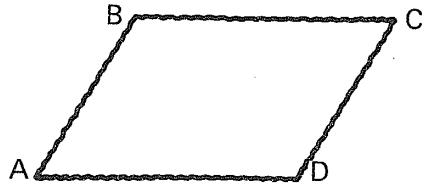
147

De acuerdo con lo anterior,
si ABCD es un paralelogramo
y $\measuredangle A = 60°$

$\measuredangle B =$ ⌊____⌋ 120°

$\measuredangle C =$ ⌊____⌋ 60°

$\measuredangle D =$ ⌊____⌋ 120°

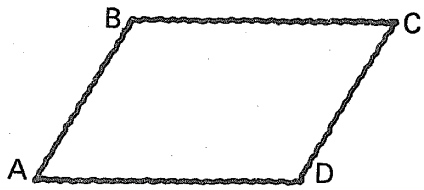


148

Con un poco de observación,
podemos establecer
una proposición semejante,
relacionada con los

ángulos interiores opuestos

de un paralelogramo.

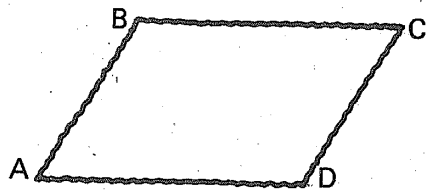


Un cuadrilátero es un paralelogramo
si y sólo si
sus ángulos interiores opuestos
son congruentes.

149

Teorema 14.

Un cuadrilátero es un paralelogramo
si y sólo si
sus ángulos interiores opuestos son congruentes.



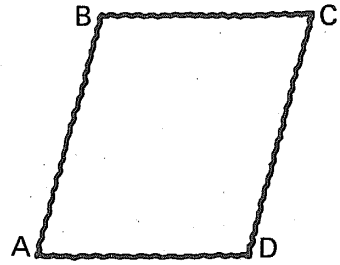
150

De acuerdo con
el teorema 14,
si ABCD es un paralelogramo,
y $\measuredangle A = 75°$
entonces
$\measuredangle C =$ ⌊____⌋

Y
de acuerdo con
el teorema 13:

$\measuredangle B =$ ⌊____⌋

$\measuredangle D =$ ⌊____⌋



75°

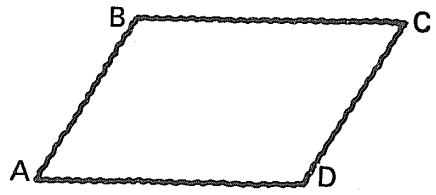
105°

105°

151

Completemos la proposición siguiente.

Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a



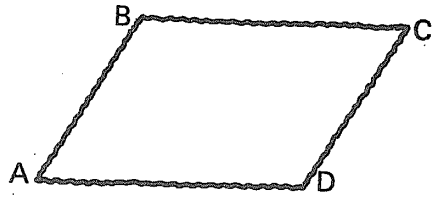
_____

la medida de un ángulo de una vuelta, es decir, 360°

152

Teorema 15.

Si *un cuadrilátero es un paralelogramo*, entonces *la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a 360°.*

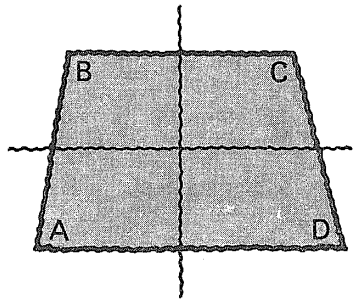


153

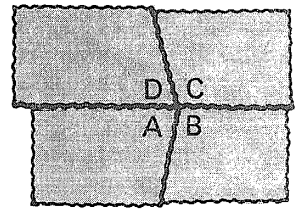
Nos preguntamos si lo anterior es válido para cualquier cuadrilátero convexo.

154

Busquemos una evidencia experimental, como lo hicimos en el caso de los triángulos.



Observar con atención la figura.



155

Conjetura:

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es igual a 360°.

Diseñemos una estrategia para demostrarla.

156

Dividamos el cuadrilátero en dos triángulos, trazando la diagonal $\overleftrightarrow{AC}$.

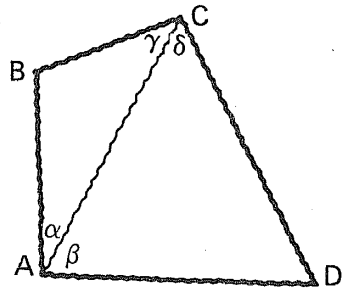
Debe verificarse

para el $\triangle ABC$:

$\measuredangle \alpha + \measuredangle B + \measuredangle \gamma =$ [ ]

para el $\triangle ACD$:

[ ]



180°

$\measuredangle \beta + \measuredangle \delta + \measuredangle D = 180°$

157

$\measuredangle\alpha + \measuredangle B + \measuredangle\gamma = 180°$

$\measuredangle\beta + \measuredangle\delta + \measuredangle D = 180°$

Por aditividad:

$\measuredangle\alpha + \measuredangle B + \measuredangle\gamma + \measuredangle\beta + \measuredangle\delta + \measuredangle D = 360°.$

Por conmutatividad:

$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta + \measuredangle B + \measuredangle\gamma + \measuredangle\delta + \measuredangle D = 360°.$

Por sustitutividad $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = \square$
dado que: $\measuredangle\gamma + \measuredangle\delta = \square$

$\square + \measuredangle B + \square + \measuredangle D = 360°.$

- $\measuredangle A$
- $\measuredangle C$

- $\measuredangle A$
- $\measuredangle C$

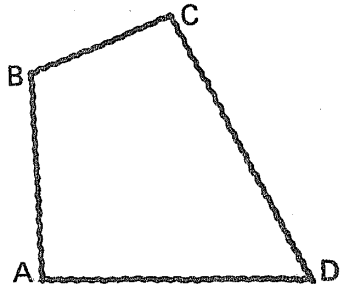
158

Si

ABCD es un cuadrilátero convexo,

entonces

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°.$



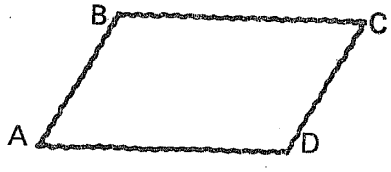
159

Ahora bien,

para que el cuadrilátero convexo ABCD
sea un paralelogramo
se requiere que:

$\overleftrightarrow{AB} \square \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \square \overleftrightarrow{AD}$

Indicar el símbolo adecuado



- $\parallel$
- $\parallel$

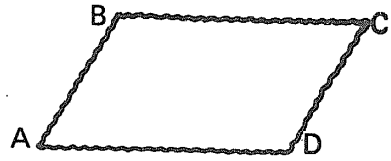
160

Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \wedge \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, entonces de acuerdo con el teorema 12:

$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{BC} \cong \overrightarrow{AD}$

161

Podemos establecer, entonces, que

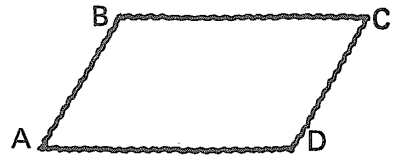


un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si

sus lados opuestos son congruentes

162

Si sabemos que:
ABCD es un paralelogramo, entonces podemos afirmar que:



$\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios
$\angle A$ y $\angle C$ son congruentes
$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son congruentes
$\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ son congruentes

163

Señalar la opción correcta.

Hemos dicho que,
en un paralelogramo,
son

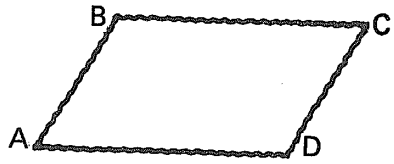
congruentes

sus lados

opuestos/consecutivos,

y
sus ángulos interiores

opuestos/consecutivos.



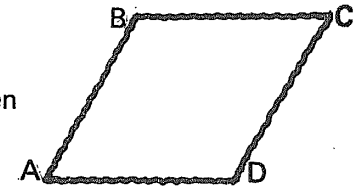
opuestos

opuestos

164

Ahora bien,
si un paralelogramo,
además de tener sus lados
opuestos congruentes,
tiene dos lados consecutivos también
congruentes,
recibe el nombre de

rombo.

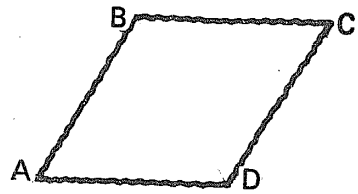


165

Si ABCD es un paralelogramo,
y sabemos que, por ejemplo,
$\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC}$
concluimos que
ABCD es un rombo.

Observemos que,
los cuatro lados de un
rombo son [ ]
porque

[ ]



- **congruentes**
- **si $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC}$**
  y además $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{CD}$ y
  $\overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{AD}$
  por ser paralelogramo,
  entonces:
  $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{AD}$

166

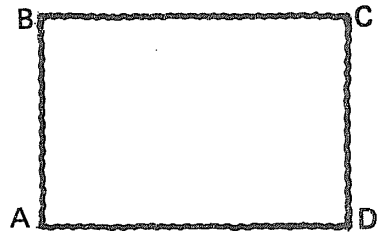
Por otra parte,
si un paralelogramo
tiene dos

ángulos consecutivos

congruentes

recibe el nombre de

rectángulo.



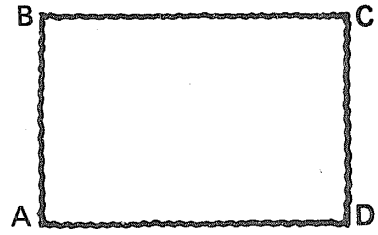
167

Si sabemos que:

ABCD es un paralelogramo
y por ejemplo:

$\angle A \cong \angle B$,

entonces
concluimos que
ABCD es un [_____]

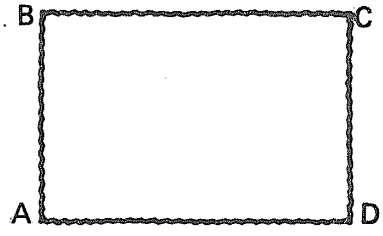


rectángulo

168

Podemos observar que:

en un rectángulo
los cuatro ángulos interiores
son [_____]
y sus medidas iguales a [___]

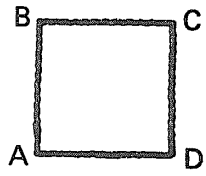


- congruentes
- 90°

169

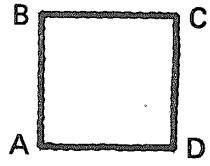
Si un paralelogramo,
tiene
dos lados consecutivos congruentes
y
dos ángulos interiores consecutivos
también congruentes
se llama

cuadrado.



170

En un cuadrado,
los cuatro lados son ⌊_____⌋
y
los cuatro ángulos interiores son ⌊_____⌋
y ⌊_____⌋ por medir ⌊_⌋



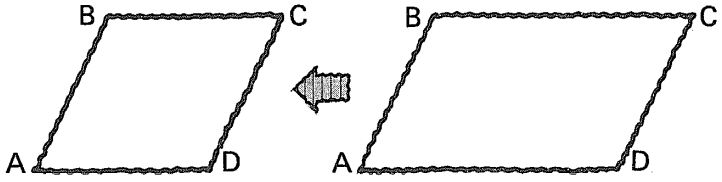
congruentes

congruentes
rectos **90°**

171

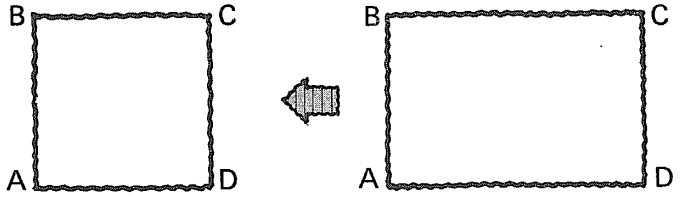
Debemos estudiar con mucha atención
los esquemas presentados
en los tres cuadros siguientes.

172



Rombo:
lados consecutivos
congruentes.

Paralelogramo

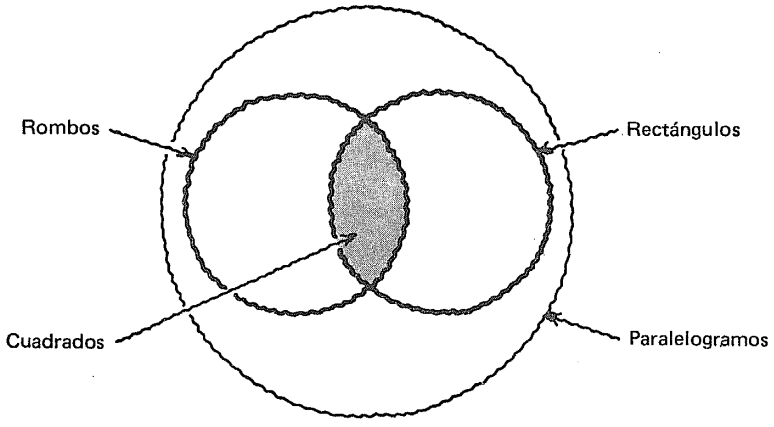


Cuadrado:
lados consecutivos y
ángulos interiores
consecutivos
congruentes.

Rectángulo:
ángulos internos
consecutivos
congruentes.

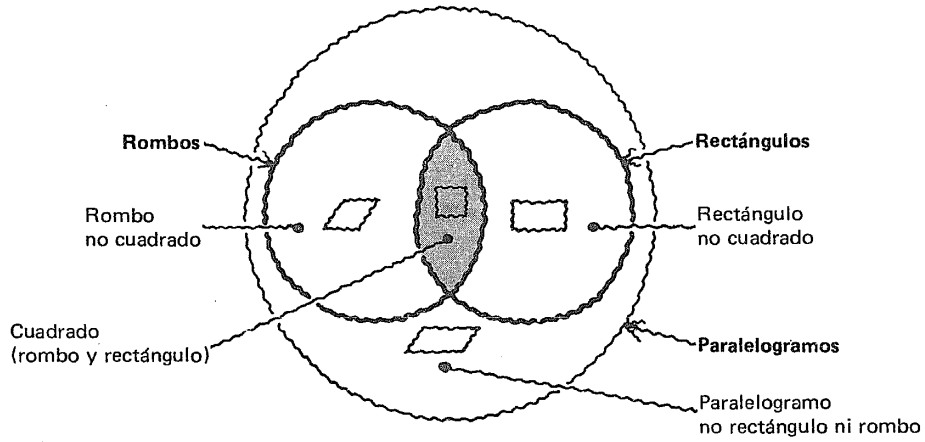
173

En un diagrama de Venn



174

Estudiar con atención.



4.5.4.2

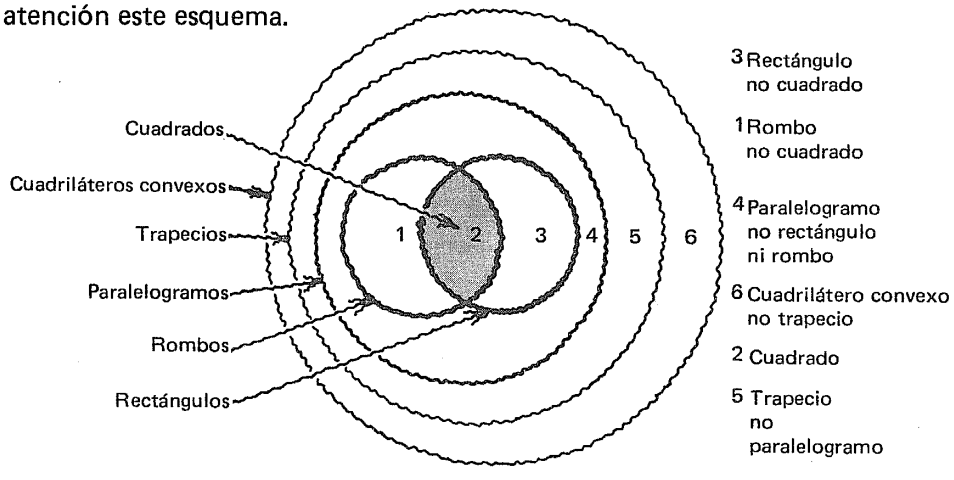
Práctica de
identificación de:

—cuadrados,
—rombos y rombos no cuadrados,
—rectángulos y rectángulos no cuadrados,
—paralelogramos y paralelogramos no rombos ni cuadrados

en un conjunto dado de paralelogramos,
si se considera necesario.

175

Estudiar con atención este esquema.



4.5.4.3

Práctica de
identificación de:

—cuadrados,
—rombos y rombos no cuadrados,
—rectángulos y rectángulos no cuadrados,
—paralelogramos y paralelogramos no rectángulos ni rombos,
—trapecios y trapecios no paralelogramos,
—cuadriláteros no trapecios,

en un conjunto dado de cuadriláteros convexos,
si se considera necesario.

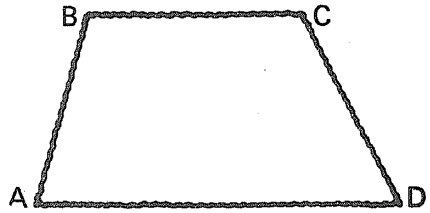
176

Sea ABCD un

trapecio no paralelogramo

en que

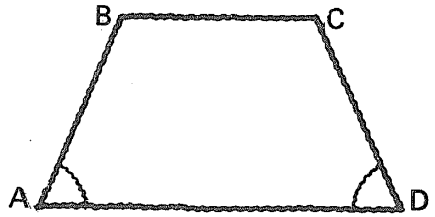
$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$
y
$\overleftrightarrow{AB} \not\parallel \overleftrightarrow{CD}$



177

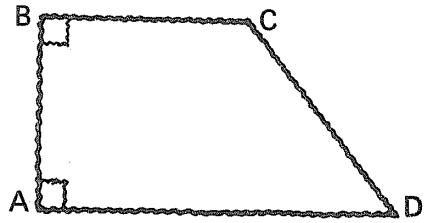
Si
$\angle A \cong \angle D$
el trapecio no paralelogramo
se denominará

trapecio isósceles.



Si
$\measuredangle A = \measuredangle B = 90°$
el trapecio no paralelogramo
se denominará

trapecio rectángulo.



4.5.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las características indicativas de un cuadrilátero de cada una de las siguientes clases:

  —cuadrado,
  —rombo y rombo no cuadrado,
  —rectángulo y rectángulo no cuadrado,
  —paralelogramo y paralelogramo no rectángulo ni rombo,
  —trapecio y trapecio no paralelogramo,
  —trapecio isósceles y trapecio rectángulo,
  —cuadrilátero no trapecio;

- *identificar* en un conjunto dado de cuadriláteros los pertenecientes a cada una de las clases enumeradas.

5.5

Polígonos regulares convexos

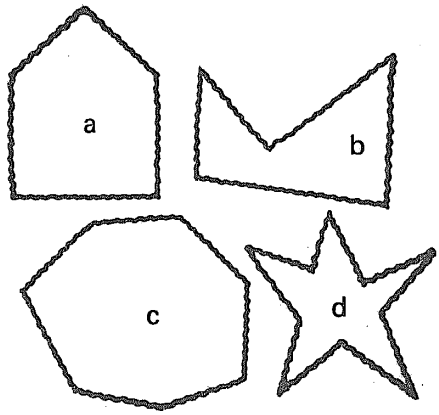
179

He aquí algunos polígonos de
más de cuatro lados.
└──┘ y └──┘ son

convexos,

y
└──┘ y └──┘ son

cóncavos.



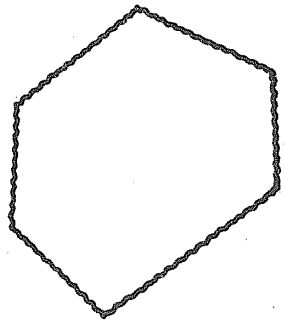
a y c

b y d

180

Concentraremos nuestra atención en
los

polígonos convexos.

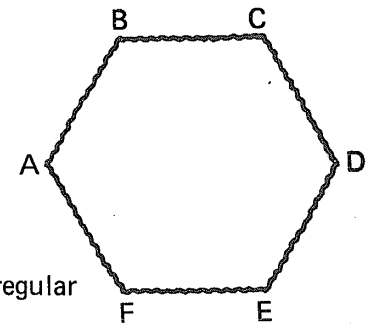


181

Llamaremos

polígonos regulares convexos

a los que
tienen
sus lados y sus ángulos interiores
congruentes.



El polígono convexo ABCDEF es regular
si y sólo si

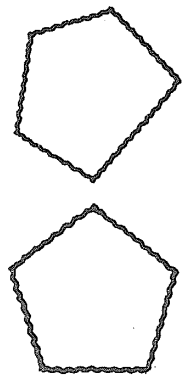
└_____┘

- $\overleftrightarrow{AB} \approx \overleftrightarrow{BC} \approx \overleftrightarrow{CD} \approx \overleftrightarrow{DE} \approx \overleftrightarrow{EF} \approx \overleftrightarrow{FA}$
  y
- $\angle A \approx \angle B \approx \angle C \approx \angle D \approx \angle E \approx \angle F$

182

La ilustración
es la representación
de un

pentágono convexo.



Si los lados son congruentes
y los ángulos interiores son congruentes
la figura adjunta representa un

└_____┘

pentágono regular convexo

183

Algunos

polígonos regulares convexos.

└_____┘ └_____┘ └_____┘ exágono heptágono octágono

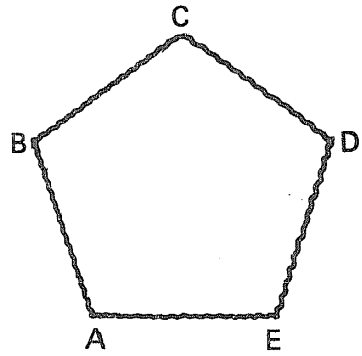
- triángulo equilátero
- cuadrado
- pentágono

184

Como en un cuadrilátero,

es el segmento de recta
que tiene por extremos
a dos

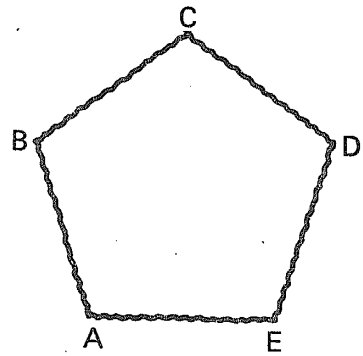
vértices no consecutivos.

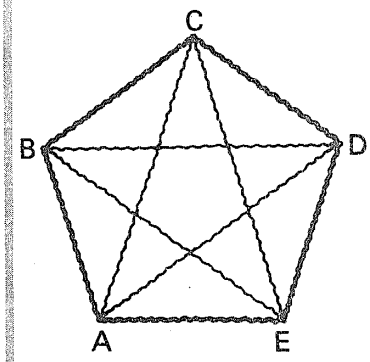


diagonal

185

Tracemos todas las diagonales
del pentágono ABCDE.



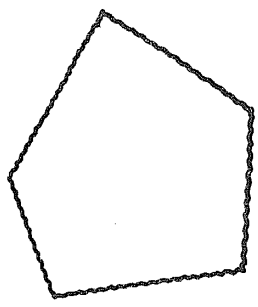


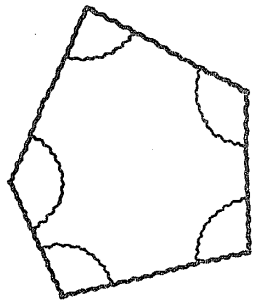
186

Señalemos
los

ángulos interiores

del polígono representado.



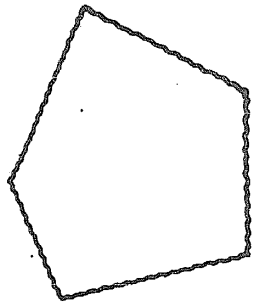


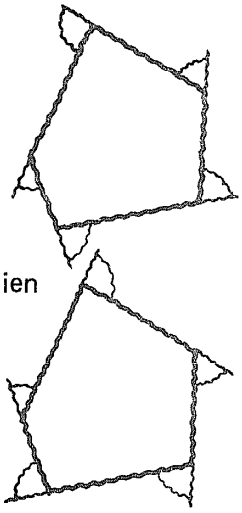
187

Indiquemos
los

ángulos exteriores

del
polígono representado.





o bien

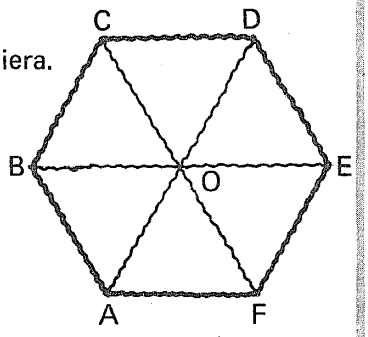
188

Consideremos
un polígono regular convexo cualquiera.

Existe un punto en su interior
que

equidista

de todos los vértices,



es decir: $\overleftrightarrow{OA} \approx \overleftrightarrow{OB} \approx \overleftrightarrow{OC} \approx \overleftrightarrow{OD} \approx \overleftrightarrow{OE} \approx \overleftrightarrow{OF}$

189

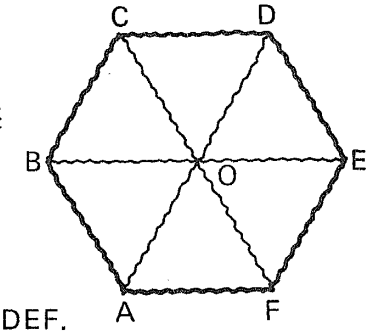
El punto O, tal que:

$\overleftrightarrow{OA} \approx \overleftrightarrow{OB} \approx \overleftrightarrow{OC} \approx \overleftrightarrow{OD} \approx \overleftrightarrow{OE} \approx \overleftrightarrow{OF}$

se llama

centro

del polígono regular convexo ABCDEF.

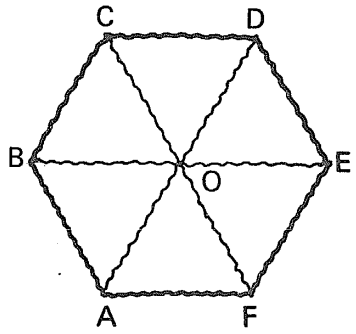


190

A los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, EOF y FOA
les llamamos

ángulos centrales

del polígono regular convexo.

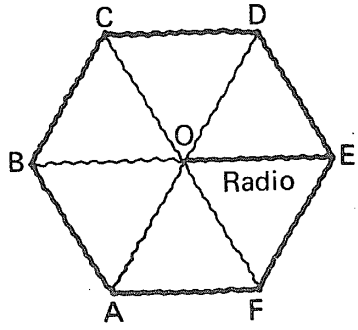


191

A los segmentos de recta
cuyos extremos son: el centro
y
cada uno de los vértices,
se les llama

radios

del polígono regular convexo.



192

En un polígono regular convexo,
llamaremos

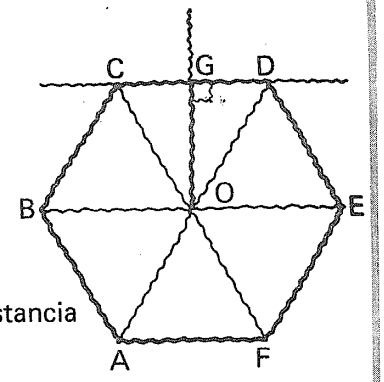
apotema

a la distancia del centro
a la recta que contiene a cada
uno de los lados.

De acuerdo con la definición de distancia
que hemos establecido:

$\overleftrightarrow{OG} \perp \overleftrightarrow{CD}$

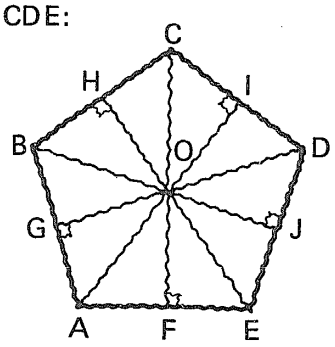
Indicar el símbolo que corresponda



$\perp$

193

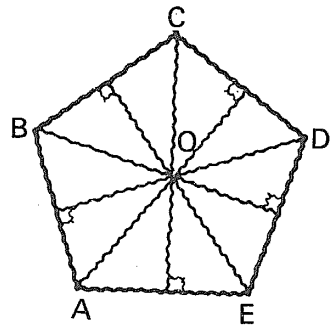
En el pentágono regular convexo ABCDE:
los lados son [ ]
los vértices son [ ]
los ángulos interiores son [ ]
los ángulos centrales son [ ]
los radios son [ ]
las apotemas son [ ]
y al punto O se le llama [ ]



- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$
- A, B, C, D, E
- ∠BAE, ∠CBA, ∠DCB, ∠EDC, ∠AED
- ∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOE, ∠EOA
- $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$
- $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$
- centro

194

Por definición:
los
lados
de un polígono regular convexo
son
congruentes,
los
ángulos interiores
de un polígono
regular convexo son [ ]
los radios son [ ]



congruentes
congruentes

195

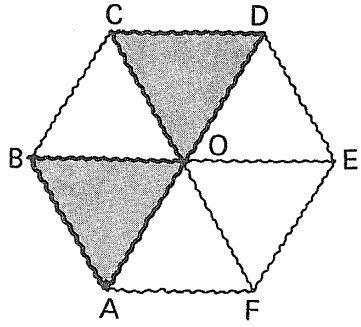
Señalar la opción correcta y completar la respuesta

Podemos afirmar
que
dos triángulos cualesquiera
(tales como AOB y COD)
en que los radios
dividen al polígono,

son/no son

congruentes
porque

[ ]



son

$\overrightarrow{OA} \cong \overrightarrow{OC}$ (son dos radios)
$\overrightarrow{OB} \cong \overrightarrow{OD}$ (son dos radios)
$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ (son dos lados)

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ (LLL)

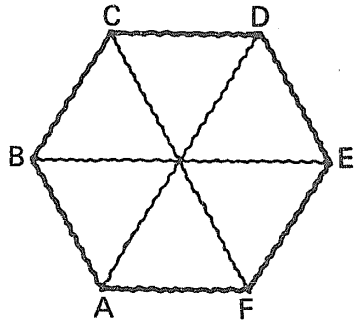
196

En el polígono regular convexo ABCDEF:

$\triangle AOB \approx \triangle BOC \approx \triangle COD$

$\approx \triangle DOE \approx \triangle EOF \approx \triangle FOA$

Es fácil ver que esta congruencia de triángulos se cumple para cualquier polígono regular convexo.



197

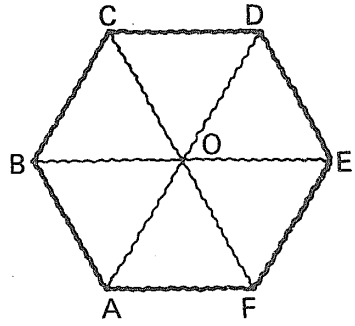
Señalar la opción correcta y completar la respuesta.

Los ángulos centrales de un polígono regular convexo

son/no son

congruentes porque

_____



son

son ángulos homólogos de triángulos congruentes

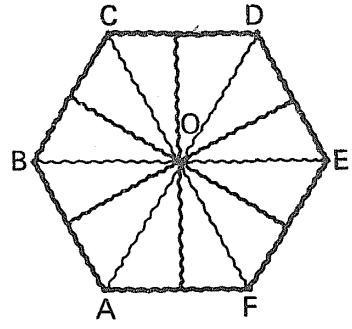
198

Señalar la opción correcta y completar la respuesta.

Las apotemas de un polígono regular convexo

son/no son

congruentes.



son

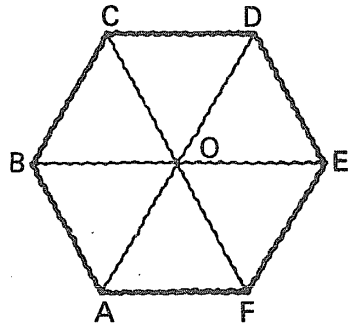
199

Por ejemplo:

un polígono regular convexo
de 6 lados (exágono)
tiene:

└┘ ángulos interiores congruentes,

└┘ ángulos centrales congruentes.



6

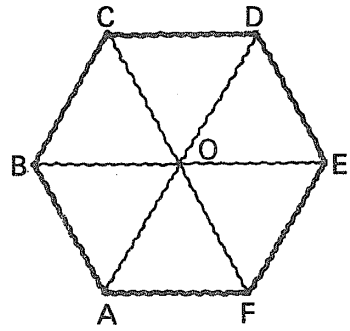
6

200

Un polígono regular convexo
de
n
lados
tiene:

└┘ ángulos interiores congruentes,

└┘ ángulos centrales congruentes.



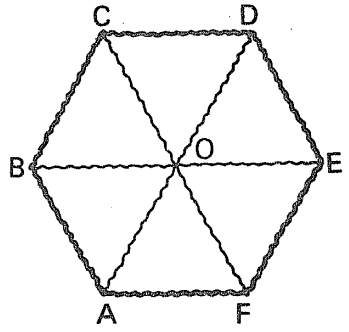
n

n

201

En un polígono regular
convexo de n lados:

*La suma de las medidas
de los n ángulos centrales
es igual a* └──────┘

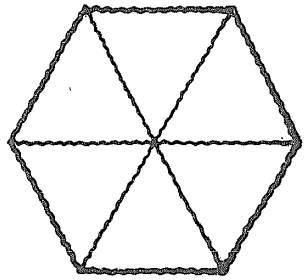


360° (medida de un
ángulo de una vuelta)

202

En un polígono regular convexo de n lados:

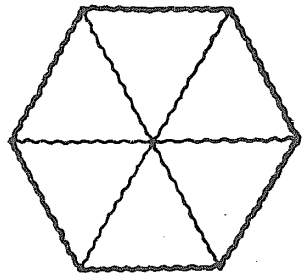
la medida de cada uno de los ángulos centrales es igual a ⌊____⌋



$\frac{360°}{n}$

203

Vamos, ahora, a determinar la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular convexo de n lados.



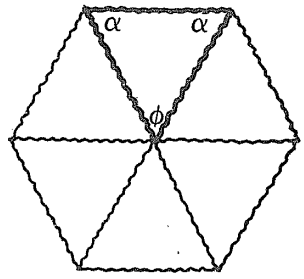
204

Considerando cualquiera de los n triángulos en que podemos dividir el polígono:

$\measuredangle\ \phi =$ ⌊____⌋

porque

⌊_____⌋

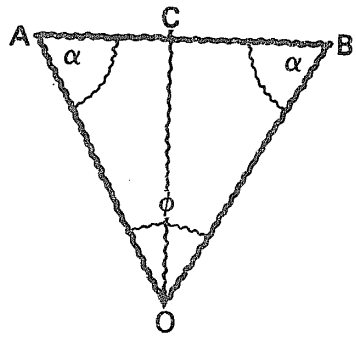


$\frac{360°}{n}$

es un ángulo central

205

Es fácil ver que
la apotema $\overline{OC}$
divide el triángulo AOB
en dos triángulos
congruentes, en que
$\angle OAB \cong \angle ABO$.

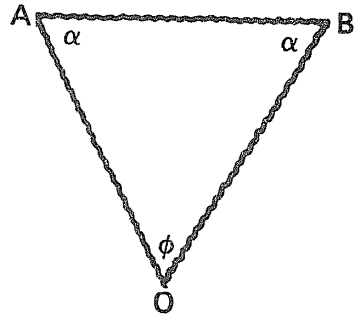


Llamemos $\angle\alpha$ a cualquiera de estos ángulos.

206

La suma de las medidas
de los ángulos internos
del triángulo ABO podemos
expresarla así:

$2\measuredangle\alpha + \measuredangle\phi =$ ⌊____⌋



180°

207

$2\measuredangle\alpha + \measuredangle\phi = 180°$

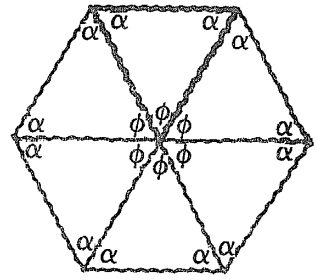
Multiplicando por n ambos
miembros de la igualdad
obtenemos:
$n\,(2\measuredangle\alpha + \measuredangle\phi) = 180°n$

o bien,

$2n\measuredangle\alpha + n\measuredangle\phi = 180°n.$
Observamos que:

$2n\measuredangle\alpha =$ ⌊_____⌋

$n\measuredangle\phi =$ ⌊_____⌋ =⌊____⌋



- la suma de las medidas de los n ángulos interiores,
- la suma de las medidas de los n ángulos centrales =
- 360°

208

Llamemos S
a la suma de las medidas
de los n ángulos
interiores.

Entonces:

$S + 360° = 180°n$

de donde

$S =$ _____

$180°n - 360°$

209

$S = 180°n - 360°$

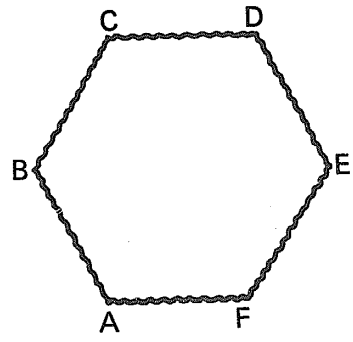
$S = 180°($_____$)$

$n - 2$

210

La suma de las medidas
de los ángulos interiores
de un polígono regular
convexo de n lados es
igual a

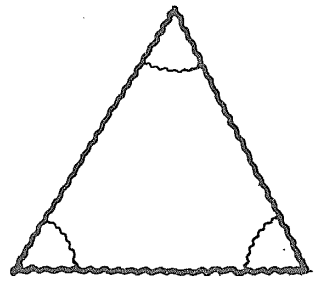
$S = 180° (n - 2).$



211

Para un triángulo equilátero,
(y en general,
para cualquier triángulo):

S = ⌊_____⌋

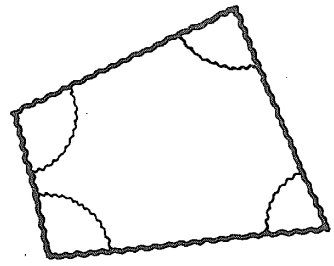


●180° (3 – 2)
180° X 1
180°

212

Para un cuadrado
(y en general, para
cualquier cuadrilátero
convexo):

S = ⌊_____⌋

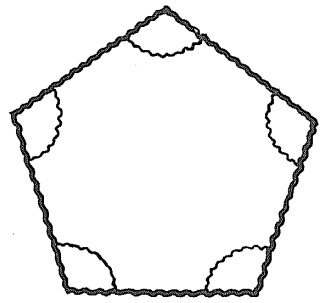


●180° (4 – 2)
180° X 2
360°

213

Para un pentágono:

S = ⌊_____⌋

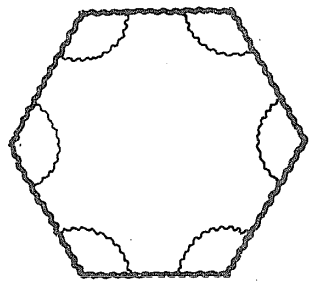


●180° (5 – 2)
180° X 3
540°

214

Para un exágono:

S = ⌊_____⌋

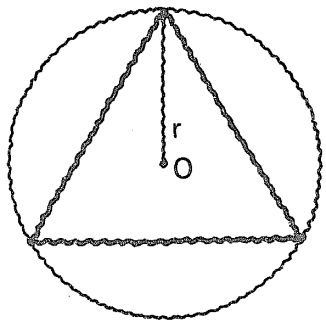


• 180° (6 – 2)
180° X 4
720°

215

He aquí
un polígono regular convexo
de 3 lados
que conocemos
como

⌊_____⌋

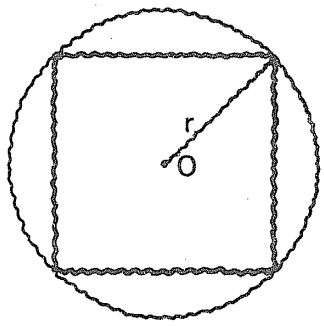


triángulo equilátero

216

Un polígono regular convexo
de 4 lados,
que conocemos
como

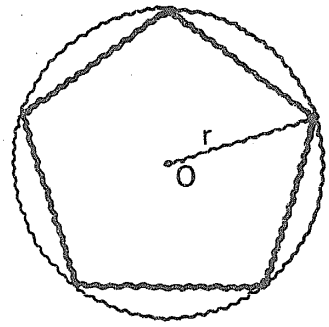
⌊_____⌋



cuadrado

217

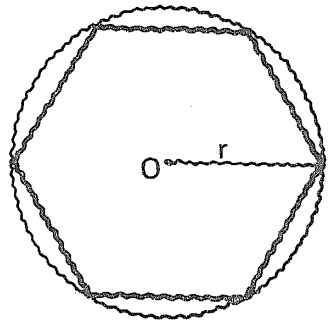
Un polígono regular convexo
de 5 lados,
que conocemos
como



pentágono

218

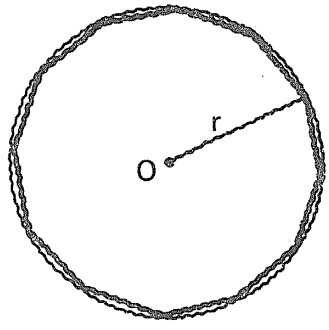
Un polígono regular convexo
de 6 lados,
que conocemos
como



exágono

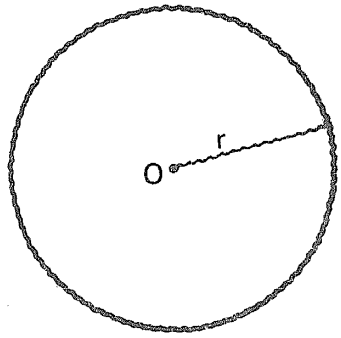
219

Podemos imaginar
el número de lados de
un polígono regular convexo
aumentando
indefinidamente...



220

Imaginemos
"una especie de
polígono, de centro O y radio r
con un número
infinito de lados".

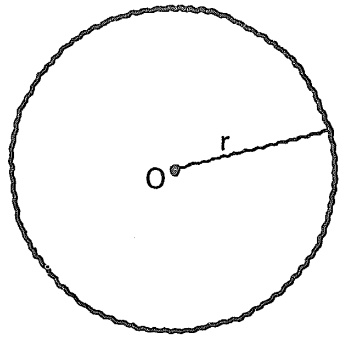


221

Llamaremos

circunferencia

de centro O y radio r
a esta
curva cerrada simple.



4.5.5.1

Práctica de
determinación,
para un polígono regular convexo
dado, de:

— la medida de cada uno de los ángulos centrales,
— la medida de cada uno de los ángulos interiores,
— la suma de las medidas de los ángulos interiores,

si se considera necesario.

4.5.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* los siguientes elementos de un polígono regular convexo dado:

  - centro
  - lado
  - vértices
  - ángulos interiores
  - ángulos exteriores y ángulos centrales
  - radio
  - apotema
  - diagonales;

- *determinar,* para un polígono regular convexo dado:

  - la medida de cada uno de los ángulos centrales,
  - la medida de cada uno de los ángulos interiores,
  - la suma de las medidas de los ángulos interiores.

5.6

Circunferencia

222

Una

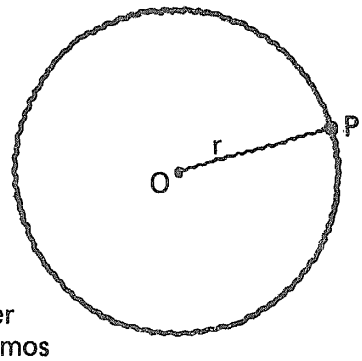
circunferencia

es una curva cerrada simple
cuyos puntos
equidistan de un punto
fijo llamado

centro.

A la distancia del centro a cualquier
punto de la circunferencia le llamamos

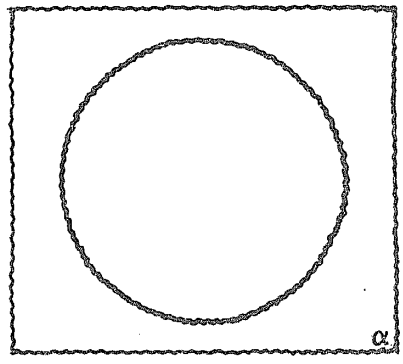
radio*.



*Llamaremos radio, indistintamente, al segmento $\overset{\frown}{OP}$ y a su medida.

223

En el plano α
en que se encuentra
incluida,
una circunferencia
define tres zonas
que seguiremos
llamando:



- interior
- exterior
- y la circunferencia misma o frontera

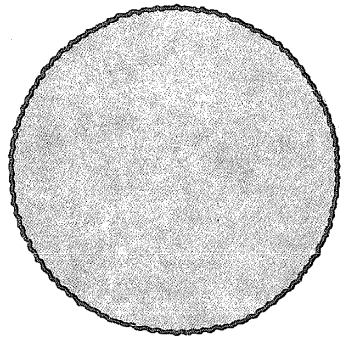
224

A la unión de una circunferencia y su interior le llamaremos:

región circular

o simplemente

círculo.



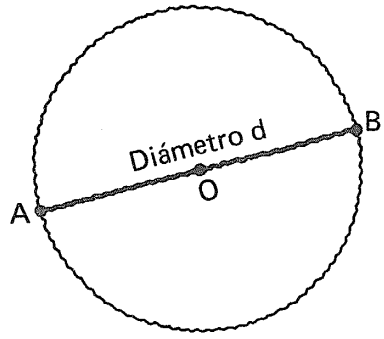
225

Llamaremos

diámetro

al segmento de recta cuyos extremos están en la circunferencia y que contiene al centro.

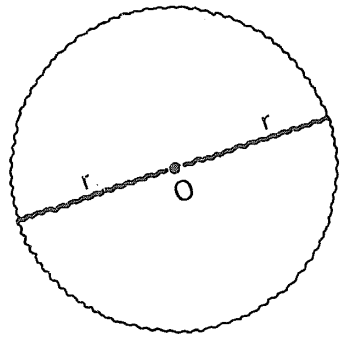
diámetro d $= \overleftrightarrow{AB}$



226

Se verifica que:

diámetro d $= 2r$



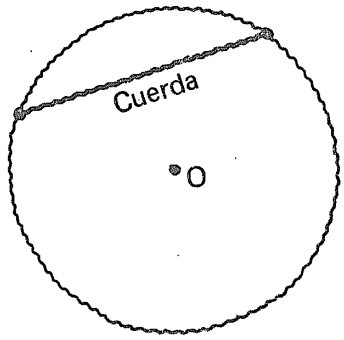
227

Cuerda

es el

segmento de recta

cuyos extremos están
en la circunferencia
y no contiene al centro.



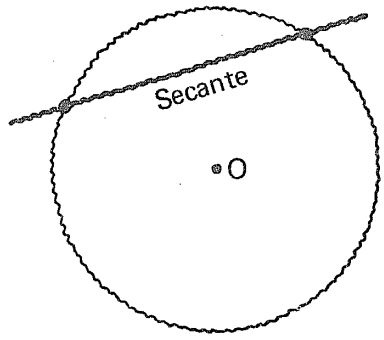
228

Secante

es la

recta

que interseca
a la circunferencia
en dos puntos
distintos.



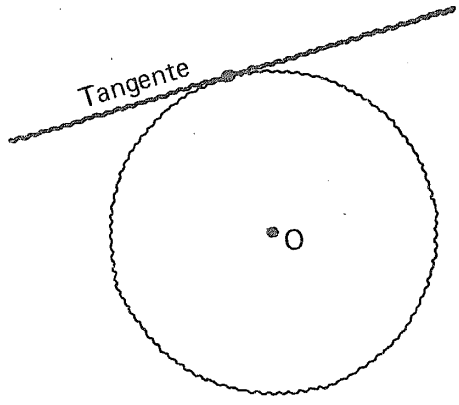
229

Tangente

es la

recta

que *interseca** a la
circunferencia
en un punto único.



*Recordar lo que es "intersección".

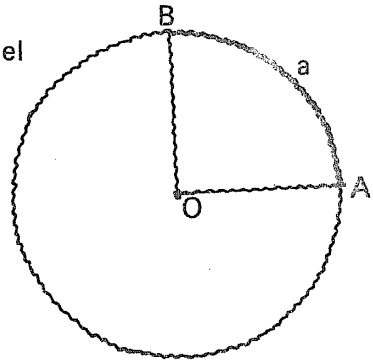
230

Un subconjunto de puntos como el representado constituye un

arco de circunferencia,

que
simbolizaremos así:

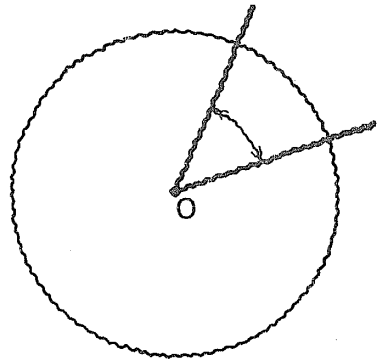
$\overset{\frown}{a}$ o así $\overset{\frown}{AB}$



231

Un ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia se llamará

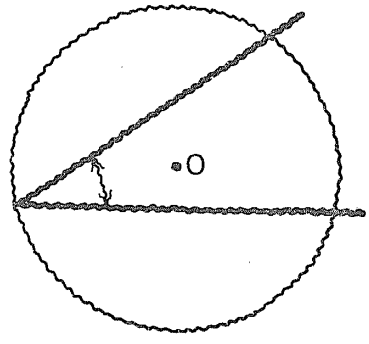
ángulo central.



232

Un ángulo que tiene su vértice en un punto de la circunferencia se llamará

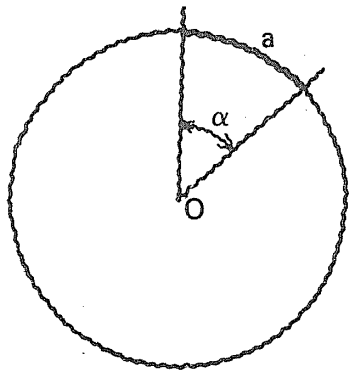
ángulo inscrito.



233

Teorema 16.

El arco de circunferencia limitado por los lados de un ángulo central tiene la misma medida de éste.



Podemos escribir, en relación con la figura:

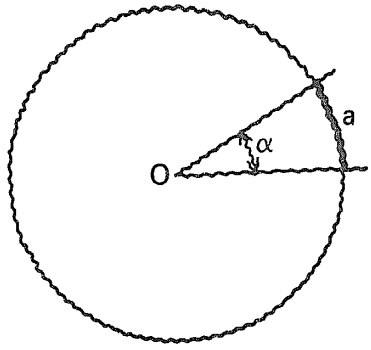
$\measuredangle\alpha = |\overset{\frown}{a}|$

234

Si $\measuredangle\alpha = 30°$

entonces

$|\overset{\frown}{a}| =$ [ ]

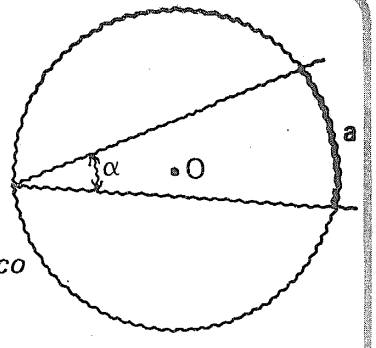


30°

235

Teorema 17.

Un ángulo inscrito en una circunferencia tiene por medida la mitad de la medida del arco limitado por sus lados.



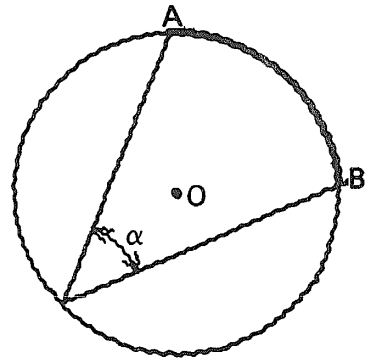
$\measuredangle\alpha = \dfrac{|\overset{\frown}{a}|}{2}$

236

Si $|\overset{\frown}{AB}| = 90°$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ ⌊___⌋



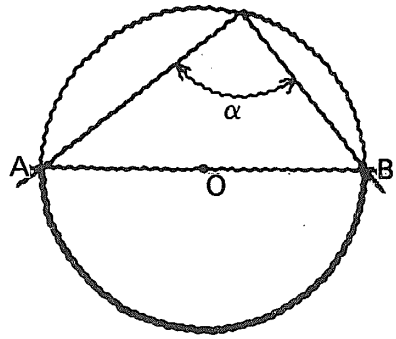
45°

237

Si $|\overset{\frown}{AB}| = 180°$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ ⌊___⌋



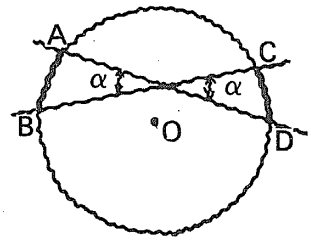
90°

238

Teorema 18.

La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior de una circunferencia es igual a la semisuma de las medidas de los arcos limitados por sus lados.

$$\measuredangle\alpha = \frac{|\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{CD}|}{2}$$



239

Si

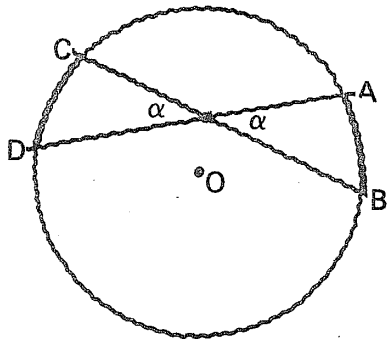
$|\overset{\frown}{AB}| = 46°$

y

$|\overset{\frown}{CD}| = 24°$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ ⌊___⌋



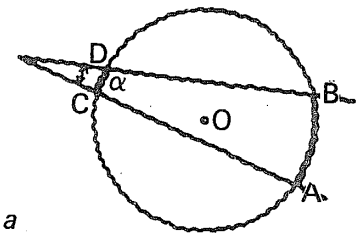
35°

240

Teorema 19.

La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el exterior de una circunferencia, es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos limitados por sus lados.

$$\measuredangle\alpha = \frac{|\overset{\frown}{AB}| - |\overset{\frown}{CD}|}{2}$$



241

Si

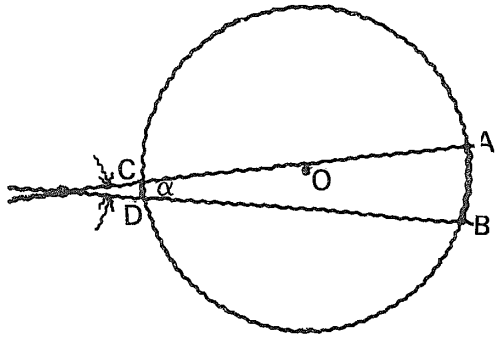
$|\overset{\frown}{AB}| = 36°$

y

$|\overset{\frown}{CD}| = 16°$

entonces

$\measuredangle\alpha =$ ⌊___⌋



10°

4.5.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

4.5.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* los siguientes elementos de una circunferencia:

  - centro
  - radio
  - diámetro
  - cuerda
  - secante
  - tangente
  - arco de circunferencia
  - ángulo central
  - ángulo inscrito;

- *determinar* la medida de un ángulo central o inscrito en una circunferencia, a partir de la medida del arco limitado por sus lados;

- *determinar* la medida de un ángulo formado por dos secantes que se intersecan en el interior o en el exterior de una circunferencia.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100